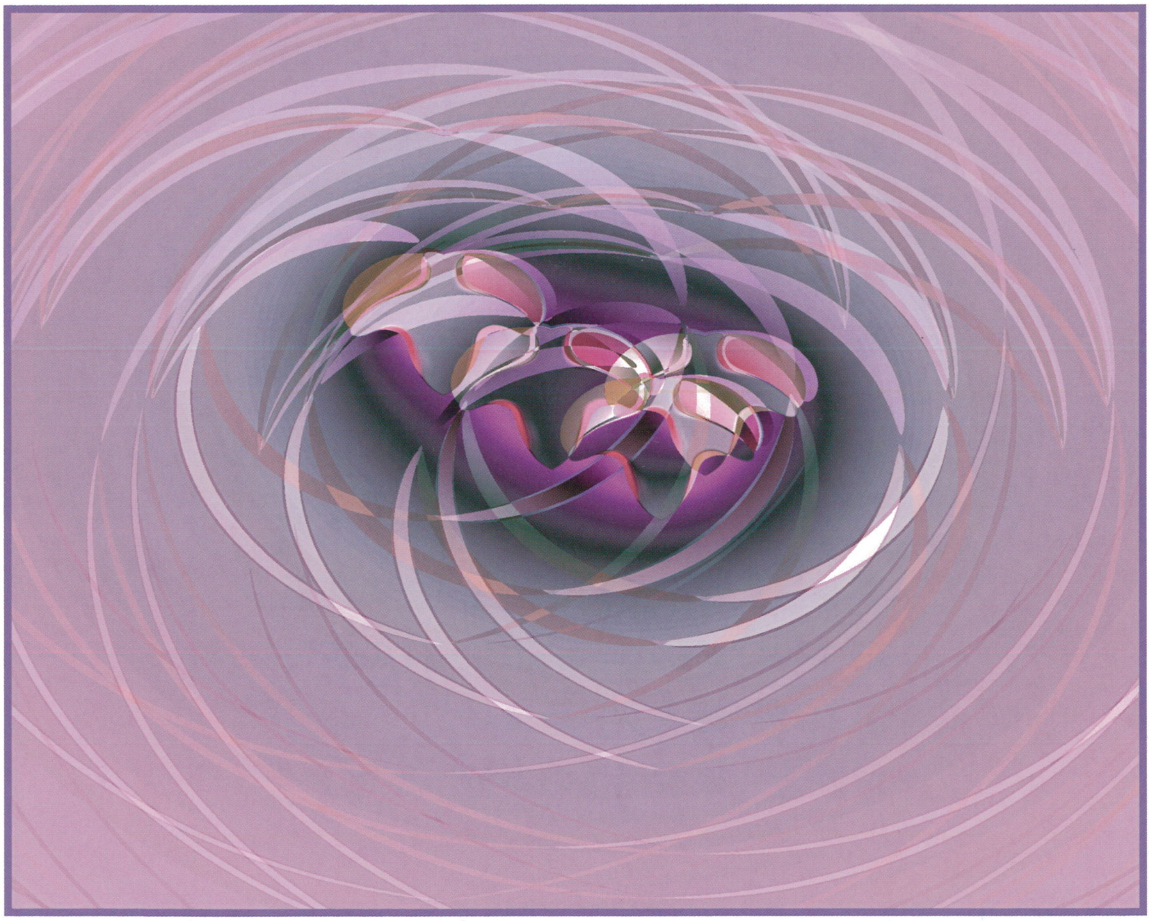
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年3月1日発行　第50巻3号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

3
2012

特集　量子を操る
拡がりゆく量子の不思議な姿



No.585

サイエンス社

臨時別冊・数理科学

現象から方程式を創り出す

本体 2095 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 585 March 2012

量子を操る

拡がりゆく量子の不思議な姿

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2008 年/11 省略
2008 年/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］

数理科学臨時別冊一覧

10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10 年/12 行列解析の基礎
11 年/1 超弦理論の基礎
11 年/3 繰りこみ群の物理と数理
11 年/4 超重力理論
11 年/6 共形場理論
11 年/9 演習形式で学ぶ 相転移・臨界現象
11 年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11 年/11 リーマン予想の数理物理
11 年/12 量子多体系の物理
12 年/1 現象から方程式を創り出す

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

March 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 585

特集／量子を操る

拡がりゆく量子の不思議な姿

筒井 泉

1. 変わりゆく量子力学の姿

量子力学とはいったい何だろうか，そしてそれはどのように使えるのだろうか——この2つの疑問は，1920年代にハイゼンベルクらが量子力学の体系の基礎を築いて以来の，物理学の最重要の課題である．当初から量子力学の正しさに疑いを抱いていたアインシュタインと，相補性原理を唱えてこれに反論したボーアによる有名な論争は，ボーアの勝利に終わったとされ，暫くの間，物理学者は量子力学を使うことに集中した．その結果，原子や素粒子の成り立ちや相互作用の解明を初めとして，様々な物性現象の理解に極めて大きな成果を見たことは周知の事実である．現代科学の発展の礎はここにある．

ところが20世紀後半の微細加工技術の著しい進歩によって，量子力学に特有な現象を実際に研究室で扱えるようになり，それまでアインシュタインやボーアらが頼らざるを得なかった思考実験も現実のものとなってきた．さらに20世紀末の量子情報科学等の出現によって，量子力学が何であるかという問いが，実は量子力学をどのように使えるのかということと不可分であることが，いっそう痛切に感じられるようになったのである．量子力学の「奇妙さ」を理解する試みの時代から，その「奇妙さ」をより深く理解し，現実世界に応用する時代への転換である．

このような量子力学を取り巻く環境の変化は，アインシュタインとボーアの論争を再吟味させるとともに[1)]，ベル不等式とその検証などを通して，量子力学の提示する新しい自然像——実在性，局所性，決定論への挑戦——の理解を促すようになった[2)]．並行して，これらの量子性の背後にある量子もつれの理解と応用の試みが，新たな世紀の始まりとともに盛んになり[3)]，今日に至っている．

この変わりゆく量子力学において，近年，特に注目すべき研究の流れに，**測定と制御**，**量子情報の物理**，および**量子の領域拡大**の3つがある．本特集号は，これら3つに関する研究の現状を，それぞれの分野の最先端の研究者に語ってもらったものである．読者の中には，量子力学については大学などの講義や教科書で一通り知っている方もおられるだろうが，それらの標準的な量子力学とは全く異なる斬新な量子力学の姿が各々の解説記事に見出されて，さぞかし驚かれるのではなかろうか[*1)]．また量子力学を全く知らない読者でも，本特集号をざっと一瞥することによって，量子力学の基礎研究の前線の雰囲気を感得することができよう．

2. 測定と制御

さてここで本特集号の各記事を紹介しよう．まず測定と制御に関しては，近年，対象とする物理

*1) 新しい時代に向けた量子力学の教育の変革の必要性については，本特集号の上田正仁氏のコラムを参照．

系の量子状態の変化を測定（観測）という外部からの操作によって能動的に制御しようとする研究が進展しており，また従来は非物理的だと思われていた量が測定可能であることが明らかになりつつある，最近では特に，Aharonov らが以前から提案していた弱測定や，これに対応する弱値と呼ばれる測定量についての実測実験への関心が大きい．北野正雄氏の「弱測定と幾何学的位相」では，この弱値の不可解な性質（量子力学で規定される固有値を大きく越えた値の測定が可能）や意外な幾何学的位相との関係が，具体的な実験とともに鮮やかに説明される．また，湯浅一哉氏の「マクロ状態と量子測定」は，量子力学の顕著な性質である干渉現象の起きる条件を考察したものであるが，対称性の破れの観点からマクロ状態の干渉現象が観測によってもたらされるという観察は興味深い．さらに，山本直樹氏の「量子フィードバック制御の数理」では，フィルターという手段を通した量子系のフィードバック制御がどのように達成されるかについての最近の研究成果が提示されている．

3. 量子情報の物理

20 世紀末の量子情報科学の勃興が量子力学の新たな発展を促したとは言え，最近の研究によって‘情報’と‘物理’という一見して異質な基礎概念の間に緊密なつながりがあることが明らかになりつつあり，これはまさに快い驚き（pleasant surprise）と言うべき事件である．そのエッセンスを伝える「悪魔が操る情報の物理」と題された丸山耕司氏の論説では，良く知られたマックスウェルの悪魔のパラドックスの解決に，情報と物理が見事な形で関与することが説かれ，両者の関係がさらに深いものである可能性があることが示唆される．堀田昌寛氏の「真空に隠れる情報と量子エネルギーテレポーテーション」は，著者の提案するエネルギーのテレポーテーション，すなわち情報ではなくエネルギーという物理的実体の非局所的移動と，ブラックホールのエントロピー減少との関連を報告したもので，これらから量子情報物理学という新しい分野の創成の様子を窺うことができよう．

4. 量子の領域拡大

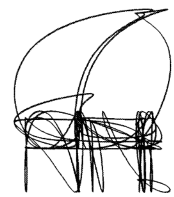
量子力学の適用対象やスケールの限界，また量子測定における精度の限界を知ることは重大な課題である．後者についてはハイゼンベルクの不確定性関係として知られる測定限界が良く知られているが，実はこの不等式は不完全なものであり，その改訂版として小澤の不等式が提唱されている．「中性子による量子干渉」の長谷川祐司氏は，長年ウィーンの中性子量子干渉実験で著名なラウホ氏の下で研鑽を積み，最近，ハイゼンベルクの不確定性関係の破れ（と小澤の不等式）の実証結果を発表しているが，本解説によってその実験の一端を知ることができよう．一方，河内宣之氏の「分子と量子力学」には，水素分子を光解離させてできる量子もつれ状態にある水素原子の光子の角度相関と，不思議な崩壊寿命の短縮現象が述べられているが，このような量子力学の領域の拡大は，量子もつれの物理的意義の認識の範囲をも拡げることになるだろう．最後の Buscemi 氏の「非局所ゲームと量子疑似テレパシー」では，ゲームという身近な土俵を借りて，量子もつれのもたらすテレパシー的な現象が量子の世界特有の状況（文脈）依存性を通して説明される．非局所量子相関の本質は，この端的な例に尽くされている．

参考文献

1) ボーアの反論の最近の数学的整理については，「現代思想」2012 年 1 月号「ニュートリノ／相対性理論」，青土社，所収の小澤正直，北島雄一郎両氏の解説が判り易い．なお，その批判的分析については，M.A.B. Whitaker, *Found. Phys.* **34** (2004) 1305 を参照．
2) 量子力学の提示する新しい自然像については，例えば拙書『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』（岩波科学ライブラリー），岩波書店，2011 年，を参照されたい．
3) 「数理科学」2009 年 2 月号「発展する量子力学」，サイエンス社，などにその事例が収められている．

（つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所）

弱測定と幾何学的位相



北野　正雄

1. はじめに

1988年，Aharonovらによって提唱された**弱測定**[1]が最近再び関心を集めている．当初は「どのようにスピン1/2粒子の成分の測定結果が100になり得るか」といったセンセーショナルなタイトルであったことなどから，際物として受け止める向きもあったが，概念としての有用性が次第に認識されるようになってきた．また，光のスピンホール効果などの微弱な相互作用の検出に弱測定が適用できることが実験的に示されたことなどから[2]，次第に注目を浴びるようになってきた．波動関数の測定という，従来の視点からは否定的に捉えられがちな実験も，弱測定を利用して行われている[3]．本稿では，弱測定やその結果である**弱値**が，標準的な量子論の枠組みに自然に収まる有用な概念であることを示したい．また，弱測定が量子状態の位相，とくに幾何学的位相と深い関係があることを示す[4]．

2. 偏光の弱測定

まず，弱測定の概要を知るための最も簡単な例として偏光測定の場合を見ておく．水平偏光，垂直偏光の基底をそれぞれ $|\mathsf{H}\rangle, |\mathsf{V}\rangle$ で表すと，$+45°$ 偏光，$-45°$ 偏光はそれぞれ

$$|\mathsf{D}\rangle = \frac{|\mathsf{H}\rangle + |\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\mathsf{X}\rangle = \frac{|\mathsf{H}\rangle - |\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

である．(1次元的) ビーム形状が (複素) 振幅 $\psi(x)$ で表される $+45°$ 偏光ビームは $|\psi_0\rangle = \psi(x)|\mathsf{D}\rangle$ と書くことができる．図1のように，このビームが複屈折媒質でできたプリズムを通過すると，$|\mathsf{H}\rangle$，$|\mathsf{V}\rangle$ に対する屈折角の違いから，水平偏光成分は $+\epsilon$，垂直偏光成分は $-\epsilon$ だけビームがずれる．すなわち，

$$|\psi_1\rangle = \frac{\psi(x-\epsilon)|\mathsf{H}\rangle + \psi(x+\epsilon)|\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

ずれの大きさ $|\epsilon|$ はビームの幅に比べて十分小さいとする（測定の弱さ）．このビームを $|\mathsf{X}\rangle$ に近い偏光

$$|\mathsf{X}_\delta\rangle = \frac{(1+\delta)|\mathsf{H}\rangle - (1-\delta)|\mathsf{V}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\delta| \ll 1 \qquad (3)$$

に対応する偏光板を通過させる（**事後選択**）．$\langle\mathsf{D}|\mathsf{X}_\delta\rangle = \delta$ である．すると，ビームの形状は

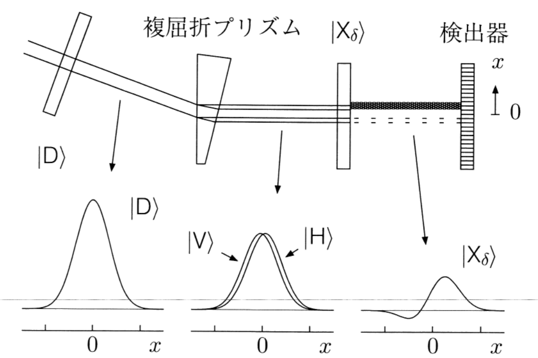


図1　偏光の弱測定．

$$\langle \mathsf{X}_\delta|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}[(1+\delta)\psi(x-\epsilon)-(1-\delta)\psi(x+\epsilon)]$$
$$\sim \delta\left[1-\frac{\epsilon}{\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\psi(x) \sim \delta\psi\left(x-\frac{\epsilon}{\delta}\right) \tag{4}$$

のように変化する．意外にも，ビームのずれ，すなわち複屈折の効果が $1/\delta$ 倍に増幅されている．通常，複屈折の効果 ϵ は 2 つのビームが完全に分離する程度に大きくなるようにして測定される．しかし，弱測定の方法ではビームが分離しない状態でも，事後選択を行うことで，効果が「増幅」され，測定が可能となるのである．ただし，ビームの振幅が δ 倍に小さくなっていることに注意する（したがって，測定の精度向上に役立つかどうかは状況による）．ここで測定対象となったのは複屈折の程度であるが，利用された演算子は $\hat{A} = |\mathsf{H}\rangle\langle\mathsf{H}|-|\mathsf{V}\rangle\langle\mathsf{V}|$ と表すことができる．後に示すように，この場合，$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \langle\mathsf{X}_\delta|\hat{A}|\mathsf{D}\rangle/\langle\mathsf{X}_\delta|\mathsf{D}\rangle = 1/\delta$ が弱値に相当し，$\hat{A}$ の固有値である ±1 の範囲外の値になり得る[1)]．

3. 弱測定の理論

一般の弱測定は図 2 のような手順に従って行われる．多数の量子系のアンサンブルを用意し，各系に対して以下の手順を逐次行う．まず，時刻 t_{i} に事前選択のための射影測定 $\hat{P}_{\mathsf{i}} = |\,\mathsf{i}\,\rangle\langle\,\mathsf{i}\,|$ を行う．結果は “1” または “0” であるが，“1” であった場合のみ，次に進む．系の状態は $|\,\mathsf{i}\,\rangle$ になっている．時刻 t_{m} $(\geq t_{\mathsf{i}})$ に，物理量 $\hat{A}$ に関する測定を行う．$\hat{A}$ のスペクトル分解を $\hat{A} = \sum_k a_k|\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|$ と書いておく．もし，射影測定を行うと，測定結果として固有値のどれか，例えば a_k が得られて，系は対応する固有状態 $|\mathsf{m}_k\rangle$ に変化する．アンサンブルに対して，測定結果を平均すると $\langle\hat{A}\rangle = \langle\,\mathsf{i}\,|\hat{A}|\,\mathsf{i}\,\rangle$ が得られることはよく知られている．

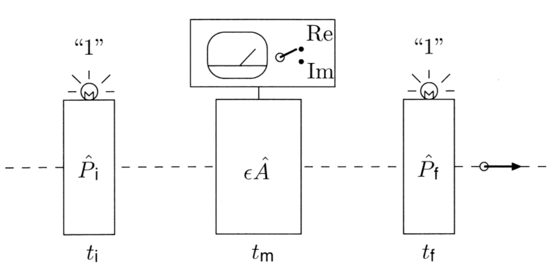


図 2　弱測定のための手続き．

しかし，ここでは系を外部のプローブ系と弱く相互作用させ，系の持つ $\hat{A}$ に関する情報を部分的に移すにとどめて，もとの状態をほとんど保持するようにする．相互作用の程度を ϵ で表す．相互作用の後に，プローブ系に対して適当な射影測定を行うことで測定結果を得る（いわゆる**間接測定**であるが，詳細は後に述べる）．得られた値はとりあえず記録しておく．次に，時刻 t_{f} $(\geq t_{\mathsf{m}})$ に事後選択のための射影測定 $\hat{P}_{\mathsf{f}} = |\,\mathsf{f}\,\rangle\langle\,\mathsf{f}\,|$ を行う．再び結果は “0” または “1” であるが，“0” の場合は先ほどの記録を破棄し，“1” であった場合は保持する．時間を遡って，測定結果を選別するのが「事後」選択と呼ばれるゆえんである．アンサンブル全体について上記の操作を繰り返した後，保持されたデータのみの平均をとると，弱値

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \frac{\langle\,\mathsf{f}\,|\hat{A}|\,\mathsf{i}\,\rangle}{\langle\,\mathsf{f}\,|\,\mathsf{i}\,\rangle} \tag{5}$$

に比例した値が得られる．

次に，プローブ系を用いた間接測定によって弱値が得られる様子を調べる．被測定系は離散スペクトル，測定器（プローブ）は 2 状態系で表されるとする（一般には，先の例におけるビームの位置 x のように連続量で表されるプローブでモデル化されることが多いが，ここでは簡単化のために 2 状態系を用いる）．プローブ系の基底を $(|0\rangle, |1\rangle)$ で表し，初期状態を $|0\rangle$ とする．被測定系の初期状態を $|\,\mathsf{i}\,\rangle$ とおく．全体系の初期状態は

$$|\Psi_0\rangle\rangle := |\,\mathsf{i}\,\rangle|0\rangle \tag{6}$$

である．被測定物理量 $\hat{A}$ に対して，測定のためのユニタリ相互作用を

$$\hat{U} := \hat{1} - \mathrm{i}\epsilon\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1 \tag{7}$$

とする．ただし，$\hat{\sigma}_1 = |0\rangle\langle1| + |1\rangle\langle0|$ はプローブに関する演算子，ϵ は微小なパラメータ，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ は虚数単位である（$\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1$ に比例する相互作用ハミルトニアンで弱く結合させればよい）．

測定相互作用後の全体系の状態は

$$|\Psi_1\rangle\rangle = \hat{U}|\Psi_0\rangle\rangle = (\hat{1} - \mathrm{i}\epsilon\hat{A}\otimes\hat{\sigma}_1)|\mathsf{i}\rangle|0\rangle \quad (8)$$

となる．事後選択のための状態を $|\mathsf{f}\rangle$ とする．ただし，$\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle \neq 0$．事後選択によってプローブ系の状態は

$$\begin{aligned}|\phi_2\rangle &= \langle\mathsf{f}|\Psi_1\rangle\rangle = \langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle(1 - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}\hat{\sigma}_1)|0\rangle \\ &= \langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle(|0\rangle - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}|1\rangle) \quad (9)\end{aligned}$$

のように変化する．再規格化を行うと，

$$|\phi_3\rangle = |\phi_2\rangle/|||\phi_2\rangle|| \sim |0\rangle - \mathrm{i}\epsilon\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}|1\rangle. \quad (10)$$

ここで，プローブ系に対して，物理量 $\hat{R} = -|v_+\rangle\langle v_+| + |v_-\rangle\langle v_-|$, $|v_\pm\rangle = (|0\rangle \pm \mathrm{i}|1\rangle)/\sqrt{2}$ の理想測定を行うと，その期待値は

$$\langle\hat{R}\rangle = \langle\phi_3|\hat{R}|\phi_3\rangle = 2\epsilon\,\mathrm{Re}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} \quad (11)$$

となる．同様に，$\hat{J} = |u+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$, $|u_\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ については，

$$\langle\hat{J}\rangle = \langle\phi_3|\hat{J}|\phi_3\rangle = 2\epsilon\,\mathrm{Im}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} \quad (12)$$

となる．このようにプローブの設定に応じて，弱値 $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$ の実部と虚部をそれぞれ測定することが可能である（事後選択とプローブ系の測定は後先になっても構わない）．

4. ゲージ自由度と幾何学的位相

弱値は量子状態の位相と深く関わっている．量子系の状態は複素ベクトル $|\psi\rangle$ で表される．このとき，状態ベクトルには

$$|\psi'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle \quad (13)$$

のように位相の自由度 ϕ が残されている；これら 2 つの状態 $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ は同じ物理状態を表している．同等な状態ベクトルの集まり $\psi = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle \,|\, -\pi \leq \phi < \pi\}$ は**射線**と呼ばれる．位相 ϕ の選択の自由度を**ゲージの自由度**と呼ぶ．$\langle\psi'| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\langle\psi|$ であることに注意すると，物理量 $\hat{A}$ の期待値 $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$，や密度演算子 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ などは，ゲージに依存しない量であることが分かる．ゲージに依存するかしないかは，量子論において非常に重要な視点である．

位相 ϕ は任意に選べるので絶対的な意味は持たないが，2 状態間の相対位相は物理的意味を持っている．異なる 2 状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の間の相対位相 $\Phi := \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ はゲージに依存する量である．実際，$|\psi_1'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\psi_1\rangle$, $|\psi_2'\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\psi_2\rangle$ に対し，

$$\Phi' = \arg\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \Phi - \phi_1 + \phi_2 \quad (14)$$

となり，2 つの相対位相 Φ と Φ' は一致しない．

このように，2 つのベクトル間の相対位相はゲージに依存するため，$\phi_1 - \phi_2$ を適当に選ぶことでどんな値もとり得る．この自由度を用いて，$\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ が正の実数となるよう，すなわち，$\arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ となるように調整できる．このとき，2 つのベクトル $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ は「同位相」であるといい，$|\psi_1\rangle \frown |\psi_2\rangle$ と表す．

例として，偏光ベクトルの同位相関係を考えよう．右回り円偏光，水平偏光，45° 偏光の 3 つの状態をそれぞれ，$|\mathsf{R}\rangle = (|\mathsf{H}\rangle + \mathrm{i}|\mathsf{V}\rangle)/\sqrt{2}$, $|\mathsf{H}\rangle$, $|\mathsf{D}\rangle = (|\mathsf{H}\rangle + |\mathsf{V}\rangle)/\sqrt{2}$ とおく．$|\mathsf{R}\rangle \frown |\mathsf{H}\rangle$, $|\mathsf{H}\rangle \frown |\mathsf{D}\rangle$ が成り立つが，$|\mathsf{D}\rangle \not\frown |\mathsf{R}\rangle$ である．そこで，同じ円偏光を表す $|\mathsf{R}'\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}|\mathsf{R}\rangle$ を導入すると，$|\mathsf{D}\rangle \frown |\mathsf{R}'\rangle$ とすることができるが，今度は $|\mathsf{R}'\rangle \not\frown |\mathsf{H}\rangle$ となってしまう．この例の場合，3 つの状態を同位相でつなごうとしても，必ずどこかに位相差 $\pi/4$ が残ってしまうのである．

一般に，3 つの状態（射線）で決まる位相差

$$\begin{aligned}\gamma_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &:= \arg\langle\psi_1|\psi_1'\rangle \\ &= \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle \quad (15)\end{aligned}$$

は**幾何学的位相**と呼ばれる[5]．ブラとケットが対で含まれているのでゲージに依存しない量である．

2 点に対する幾何学的位相は $\gamma_2(\psi_1, \psi_2) = \arg\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$ である．また，4 点に対するものは，$\gamma_4(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \gamma_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \gamma_3(\psi_1, \psi_3, \psi_4)$ となるので，3 点に対する幾何学的位相が本質的である．状態を連続的につないだ経路にも同様に拡張できる．

偏光状態のような 2 状態系の場合，幾何学的位相 γ_3 は図 3 に示すポアンカレ球上の球面 3 角形の面積 Ω と対応づけることができる：

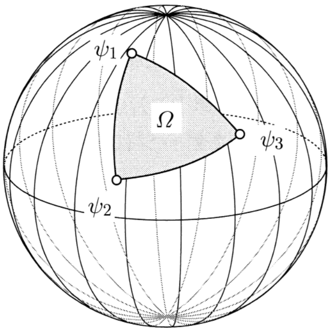


図 3　ポアンカレ球上の球面 3 角形．

$$\gamma_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = -\frac{\Omega}{2}. \tag{16}$$

5. 弱演算子—2 状態演算子

弱測定には，事前選択状態 $|\mathsf{i}\rangle$ と事後選択状態 $|\mathsf{f}\rangle$ という 2 つの状態が関与している[6)]．そこで，2 つの状態によって定義される演算子を考える．すぐに思いつく $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|$ はゲージ依存である．そこで，$\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle \neq 0$ の場合，

$$\hat{W} := \frac{|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \ (= \hat{W}_{\mathsf{if}}) \tag{17}$$

とおけば，ゲージに依存しない演算子が得られる．これを**弱演算子**と呼ぶ（$\sqrt{\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle/\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle}|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|$ や射影演算子 $\hat{P}_{\mathsf{f}}, \hat{P}_{\mathsf{i}}$ の合成 $\hat{P}_{\mathsf{f}}\hat{P}_{\mathsf{i}} = |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ もゲージに依存しない．これらもそれぞれ物理的役割を担っている）．

事前選択，事後選択が同じものであるとき（$|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}| = |\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$）には，密度演算子 $\hat{\rho} = |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ に一致する．このことから弱演算子は密度演算子の拡張であることが分かる．$\mathrm{Tr}\,\hat{W} = 1$ であることにも注意する．Tr はトレースを表す．

弱値は，$\hat{W}$ を用いて

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W} = \frac{\langle\mathsf{f}|\hat{A}|\mathsf{i}\rangle}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \ (= \langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w;if}}) \tag{18}$$

と表される．物理量 $\hat{A}$，始状態 $|\mathsf{i}\rangle$，終状態 $|\mathsf{f}\rangle$ の 3 つによって決まる値である．通常の期待値 $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{\rho} = \langle\mathsf{i}|\hat{A}|\mathsf{i}\rangle$ とよく対応している．$\mathrm{Tr}\,\hat{X}^{\dagger}\hat{Y}$ は演算子 $\hat{X}, \hat{Y}$ の内積にあたる．

密度演算子 $\hat{\rho}$ と異なり，弱演算子 $\hat{W}$ は一般にエルミートではない；$\hat{W}^{\dagger} \neq \hat{W}$．また，$\hat{W}$ と $\hat{W}^{\dagger}$ は非可換であり，$\hat{W}$ は正規（normal）でもない．つまり，正規直交基底で対角化できない．一方，$\hat{W}_{\mathrm{R}} := (\hat{W}+\hat{W}^{\dagger})/2$, $\hat{W}_{\mathrm{I}} := (\hat{W}-\hat{W}^{\dagger})/2\mathrm{i}$ はそれぞれエルミート演算子であり，$\mathrm{Re}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W}_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{Im}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{W}_{\mathrm{I}}$ のように，それぞれ，弱値の実部と虚部を与える．$\hat{W}_{\mathrm{R}}$ と $\hat{W}_{\mathrm{I}}$ は可換ではないため，1 つのサンプルに対して，弱値の実部と虚部を同時に測ることはできないが，サンプルが多数用意できれば，それぞれ別々に測ることができる．

密度演算子が通常のアンサンブルを特徴づけるように，弱演算子 $\hat{W}_{\mathsf{if}}$ は，事前選択 i と事後選択 f の両方を通過した系がつくる部分アンサンブルを表している．比喩的にいえば，i 高校に入学し，卒業後，f 大学に進学した高校生による仮想的なアンサンブル（大学別同窓会）を与えている．各生徒が弱測定によって性質を問われるのは高校在学中なのであるが，部分アンサンブルへの帰属が決まるのは卒業時である．ただし，その時点ではもはや高校生ではないので，弱測定を課することはできない．なお，在学期間はまちまちでもよい．また，弱くない通常の測定を行うと，系の持つ情報が失われ，事後選択が意味を持たなくなるので，この部分アンサンブルは構成できなくなる．

6. 弱値と複素確率測度

弱値の性質を見ておこう．正規直交基底 $|\mathsf{m}_k\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対応する射影演算子 $\hat{P}_k = |\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|$ の弱値 w_k は

$$w_k = \langle\hat{P}_k\rangle_{\mathrm{w}} = \mathrm{Tr}\,\hat{P}_k\hat{W} = \frac{\langle\mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle} \tag{19}$$

である．これらは，射影演算子による $\hat{1}$ の分解 $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \cdots + \hat{P}_n = \hat{1}$ に対応して，$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ を満たす．添字の部分集合 $\varDelta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} =: X$ に関する射影演算子を

$$\hat{P}(\varDelta) := \sum_{k \in \varDelta} \hat{P}_k \tag{20}$$

のように定義する．対応する弱値 $w(\varDelta) := \langle\hat{P}(\varDelta)\rangle_{\mathrm{w}}$ は複素数であり，次の性質を満たす：

(1) $w(\emptyset)=0$,

(2) $\varDelta_1 \cap \varDelta_2 = \emptyset$ なら $w(\varDelta_1 \cup \varDelta_2) = w(\varDelta_1) + w(\varDelta_2)$,

(3) $w(X)=1$.

このような性質は確率測度のそれに類似している．つまり，$|\mathsf{i}\rangle$ から $\{|\mathsf{m}_k\rangle \,|\, k \in \varDelta\}$ に含まれる状態のどれかを経由して $|\mathsf{f}\rangle$ へ到達する経路 $\varDelta$ をとる「確率」が $w(\varDelta)$ であると解釈できる．しかし，その「確率」が複素数値をとる点が通常の確率と異なっており，複素確率測度と呼ばれるものになっている．$\hat{P}_k$ の固有値が $\{0,1\}$ であるにも関わらず，その弱値である $w_k = \langle \hat{P}_k \rangle_{\mathrm{w}}$ は複素数であり，その絶対値は 1 より大きくなり得る．

量子系の場合，経路に確率を割り当てようとすると，1 を越える値や負の値，さらには複素数を許さなければならないことを示している．Feynman は初心者向けに量子論の話をする際，経路に割り当てられた複素数の和の重要性を強調している[7)]．

3 つ箱問題[6)]は負の確率の表れる典型例である．$n=3$ の場合，$|\mathsf{i}\rangle = (|\mathsf{m}_1\rangle + |\mathsf{m}_2\rangle + |\mathsf{m}_3\rangle)/\sqrt{3}$, $|\mathsf{f}\rangle = (|\mathsf{m}_1\rangle + |\mathsf{m}_2\rangle - |\mathsf{m}_3\rangle)/\sqrt{3}$ とすると，$w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -1$ となる．さらに，$w(\{1,2\}) = 2$, $w(\{2,3\}) = 0$, $w(\{3,1\}) = 0$, $w(\{1,2,3\}) = 1$ である．これはパラドックスとして提示されたものであるが，通常の確率としてではなく，弱値として解釈すれば納得しやすいし，実際に測定することもできる．

ところで，部分アンサンブル $\hat{W}_{\mathrm{if}}$ に対して，経路 $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$, $|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ の弱値が $\langle |\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}| \rangle_{\mathrm{w}} = \langle |\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}| \rangle_{\mathrm{w}} = 1$ であることは簡単に確かめられる．この部分アンサンブルに属する系は，その事前選択と事後選択にはさまれた期間において，確実に状態 $|\mathsf{i}\rangle$ にあったとも，確実に状態 $|\mathsf{f}\rangle$ にあったともいえるのである．一般に演算子 $|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ と $|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$ は非可換なので，両方が同時に確定値 1 をとるような通常の意味での状態（アンサンブル）は存在しない．

7. 弱値と幾何学的位相

物理量 $\hat{A}$ のスペクトル分解が $\hat{A} = \sum_k a_k \hat{P}_k$

のとき，弱値は $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}=\sum_k a_k w_k$ と表せる．したがって，物理量の弱値の異常性（値が大きいこと，複素数であること）の原因は w_k の異常性に遡ることができる．さて，w_k の位相は式 (19) より

$$\arg\ w_k=\arg\frac{\langle\mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle}{\langle\mathsf{f}|\mathsf{i}\rangle}$$
$$=\arg\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|\mathsf{i}\rangle=\gamma_3(\mathsf{i},\mathsf{m}_k,\mathsf{f}). \quad (21)$$

通常の弱測定では $|\mathsf{i}\rangle, |\mathsf{f}\rangle$ は直交に近いので，ポアンカレ球上では共役点に近い関係にある．したがって，$|\mathsf{m}_k\rangle$ の選び方次第で，w_k の位相は大きく変化することが分かる．逆に $|\mathsf{i}\rangle$ と $|\mathsf{f}\rangle$ が同じ状態の場合，つまり通常の測定においては位相はゼロになる．弱値には3つの量子状態が関与しており，それらによって決まる幾何学的位相が背後で効いているのである．弱値の特異なパラメータ依存性が球面3角形の面積の性質に関係することが知られている[8,9]．

簡単な例を見ておこう．2状態系の基底を $(|0\rangle,|1\rangle)$ とする．

$$|\mathsf{i}\rangle=|0\rangle,\quad |\mathsf{f}\rangle=\cos\theta|1\rangle+\sin\theta|0\rangle$$
$$|\mathsf{m}_1\rangle=\frac{|0\rangle+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|1\rangle}{\sqrt{2}},\quad |\mathsf{m}_2\rangle=\frac{|0\rangle-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

であるとする．射影演算子に対する弱値は

$$w_1=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\cot\theta),\ w_2=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\cot\theta)$$

となる．θ が $\pi/2$ に近い場合，すなわち $|\mathsf{i}\rangle, |\mathsf{f}\rangle$ の隔たりが小さい場合には，$w_1\sim 1/2$, $w_2\sim 1/2$ であり，古典的直観に近い．逆に θ がゼロに近い場合には，絶対値が $|\cot\theta|$ の大きい複素数の打ち消しの結果として，$w_1+w_2=1$ が達成されており，波動の干渉性が大きく効いている．

8. 混合状態による選択

事前選択，事後選択が混合状態の場合の弱演算子は

$$\hat{W}=\frac{\hat{\rho}_{\mathsf{i}}\hat{\rho}_{\mathsf{f}}}{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_{\mathsf{f}}\rho_{\mathsf{i}}} \quad (23)$$

と定義するのが適当である．$\hat{\rho}_{\mathsf{f}}=|\mathsf{f}\rangle\langle\mathsf{f}|$, $\hat{\rho}_{\mathsf{i}}=|\mathsf{i}\rangle\langle\mathsf{i}|$ を代入すると，純粋状態の場合の式 (17) が得られる．

事後選択が完全混合の場合，すなわち，$\hat{\rho}_{\mathsf{f}}=\hat{1}/n$ の場合の弱演算子は $\hat{W}=\hat{\rho}_{\mathsf{i}}$ であり，弱値は $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}=\mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{\rho}_{\mathsf{i}}=\langle\hat{A}\rangle$ となる．つまり，事後選択がないのと同じであり，初期状態に対する通常の期待値になる．このことからも，弱値が通常の期待値の拡張であることがわかる．事前選択が完全混合の場合も同様の結果が得られるが，実験的には少し趣の異なった状況になっている．

事後選択が2つの状態 $|\mathsf{f}_1\rangle, |\mathsf{f}_2\rangle$ の重み p_1, p_2 (≥ 0) の混合の場合を考える．すなわち事後選択が密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathsf{f}}=p_1|\mathsf{f}_1\rangle\langle\mathsf{f}_1|+p_2|\mathsf{f}_2\rangle\langle\mathsf{f}_2|$, $p_1+p_2=1$ の場合の弱値は

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}=\frac{p_1|\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_1\rangle|^2\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}1}+p_2|\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_2\rangle|^2\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}2}}{p_1|\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_1\rangle|^2+p_2|\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_2\rangle|^2} \quad (24)$$

となって，弱値は事後選択に関する重みづき和で表されることがわかる．ただし，$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}j}=\langle\mathsf{i}|\hat{A}|\mathsf{f}_j\rangle/\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_j\rangle$ $(j=1,2)$．注目すべきは，絶対値の大きい弱値（小さい $|\langle\mathsf{i}|\mathsf{f}_j\rangle|$）には小さい重みがつくということである．つまり，期待値を上回る大きい弱値は事後選択における混合に対して脆弱である．

9. 波動関数の弱測定

状態ベクトル $|\mathsf{m}_k\rangle$ $(k=1,2,\ldots,n)$ が正規直交基底をつくっているとする．任意の状態ベクトル $|\psi\rangle=|\mathsf{i}\rangle$ を初期状態とみなす．事後選択の状態を基底の均等な和 $|\mathsf{f}\rangle=(1/\sqrt{n})\sum_{k=1}^{n}|\mathsf{m}_k\rangle$ と選ぶ．

演算子 $\hat{P}_k=|\mathsf{m}_k\rangle\langle\mathsf{m}_k|$ の弱値は

$$\langle\hat{P}_k\rangle_{\mathrm{w}}=\psi_k\Big/\sum_{k=1}^{n}\psi_k \quad (25)$$

である．$\psi_k=\langle\mathsf{m}_k|\psi\rangle$ は確率振幅，すなわち波動関数である．したがって，k を変えながら，弱測定を行うことで波動関数 ψ_k を求めることができる．ゲージは基底 $|\mathsf{m}_k\rangle$ の位相の選び方で固定されている．連続基底 $|x\rangle$ $(-\infty<x<\infty)$ の場合

の波動関数 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ の測定が偏光を用いて行われている[3]．しばしば，波動関数は，対応する物理量がない，複素数である，などの理由で測定できないとされてきたが，弱測定という枠組みでは実測可能な量である．

10. まとめ

従来，弱測定はその不思議な側面，すなわち固有値を越える大きな測定結果が得られることや，弱値が複素数であることなどが議論の対象とされてきた．ここでは，弱演算子が密度演算子の自然な拡張であることを示し，その有用性を示すとともに，弱値の不思議な振舞いに幾何学的位相が深く関わっていることを見てきた．

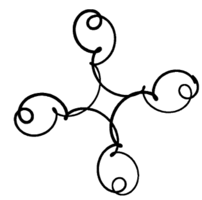
Aharonov らは，さらに弱測定の部分アンサンブルを援用して，時間の向きに関して対称な量子論の枠組みを作ろうと考えている[10]．また，コンシステント・ヒストリー理論[11]との関係も指摘されている．

参考文献

1) Y. Aharonov, D.Z. Albert, and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).
2) D. Hosten and P. Kwiat: *Science* **319**, 787 (2008).
3) J.S. Lundeen, B. Sutherland, A. Patel, C. Stewart, and C. Bamber, *Nature* **474** 188 (2011).
4) E. Sjöqvist: *J. Phys. A* **359** 187 (2006).
5) S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **44**, 247 (1956).
6) Y. Aharonov and L. Vaidman: *Lecture Notes in Physics* **M72**, 369 (2002).
7) R.P. Feynman: "QED — The strange theory of light and matter", Princeton University Press (1985); 釜江常好，大貫昌子訳『光と物質のふしぎな理論』(1987, 岩波書店).
8) S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *New J. Phys.* **11**, 093025 (2009).
9) H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **78**, 034401 (2011).
10) Y. Aharonov, S. Popescu, and J. Tollasken, *Physics Today*, November (2010) p.27.
11) R.B Griffiths: "Consistent Quantum Theory", Cambridge (2002).

（きたの・まさお，京都大学大学院工学研究科）

マクロ状態と量子測定



湯浅 一哉

1. はじめに

量子力学が支配するミクロの世界は，常識を超える現象に満ちあふれている．量子力学の不思議の始まりは「波動・粒子の二重性」．そして，量子力学といえば「干渉現象」である．「不確定性原理」によって，私たちは古典力学的な決定論的世界観を捨てることを迫られた．また，「波動関数の収縮」をめぐって，自然科学の基本である「観測」についてすら深く考えさせられることになった．

本稿では，これら「**干渉**」，「**不確定性原理**」，「**観測**」が関わり合う興味深い話題を紹介したいと思う．それは，「**ボース・アインシュタイン凝縮体（BEC）の干渉**」である．BECとは，例えばナトリウム原子など「ボース統計」のルールに従う原子をレーザー光でつくったトラップに多数個（典型的には$10^4 \sim 10^8$個）入れ，極低温（100 nK ～ 数μK）に冷やしたときに，ある温度を境に相転移的にマクロな数の原子がトラップ中の基底状態に落ち込んで“凝縮”した原子気体である[1,2]．それは多数の原子からなる原子集団だが，レーザー光のように原子の波動がそろって集団全体が1つの巨大な波動として振る舞い，マクロなスケールで量子効果を示すとともに，様々な興味深い現象を引き起こす．当初Einsteinが議論した理想原子気体の凝縮体（原子間に引力が働いているわけでもないのに凝縮する点が肝要）に近いものが1995年に実験的に実現され，その基本的な性質を研究した業績に対して2001年のノーベル物理学賞が授与されたが，その背景として取り上げられているのがここで話題にする「BECの干渉」である．

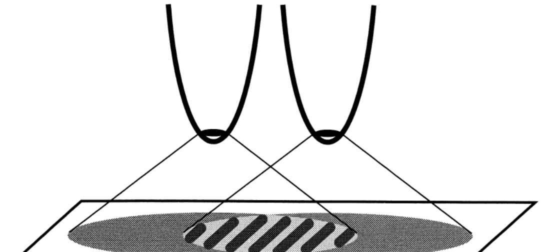


図1　2つの独立なBECをトラップから解放して重ねると干渉縞が観測される[1~3]．

2つのBECを独立につくり，それらをトラップから解放して，拡散して重なり合ったところで撮像すると，干渉縞が観測される（図1）[1~3]．これは，BECが確かにレーザー光のようなもので，高いコヒーレンス（干渉性）を有することを証明したものとして注目を集めた．これに対し，**このマクロ状態のコヒーレンスは，観測によってもたらされる**という説明が存在する．量子力学ならではの干渉現象に，量子力学の世界における観測の不思議が重要な役割を果たす興味深い話題である．それを紹介しよう．

2. 1粒子干渉と2粒子干渉

まずは，量子力学的干渉の基礎を整理しておこ

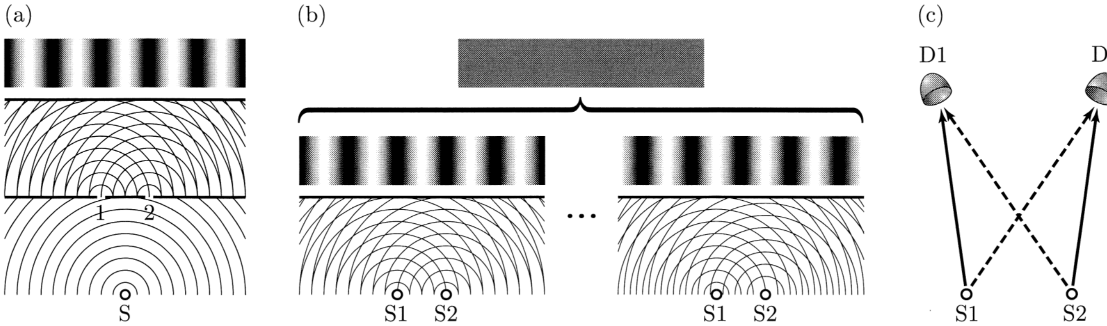


図 2　(a) 二重スリットの干渉．粒子を 1 つずつ多数個投げ込むと，スクリーン上に干渉縞が浮かび上がる．(b) 2 つの位相相関のない粒子源の場合，粒子ごとに位相差が異なり，存在確率分布がずれる．それらの重ね焼きに干渉縞は生じない．(c) 2 つの粒子検出器で粒子を 1 つずつとらえた場合，実線と破線の 2 つの可能性が干渉する（2 粒子干渉）．

う．干渉といっても様々あるが，最も基本的な設定は二重スリットの干渉だ．図 2 (a) のように，ついたてに開けられた 2 本のスリットをめがけて粒子源 S から粒子（例えば電子）を 1 つ発射する．スリットを通過した粒子は，ついたての向こうに立てられたスクリーンに到達し，その到着地点がスクリーン上に記録される．このとき，その粒子がスリット 1 と 2 のどちらを通過して来たかが判別できなければ，スリット通過後の粒子の状態は，スリット 1 を通過して来た状態 $\psi_1(x)$ とスリット 2 を通過して来た状態 $\psi_2(x)$ の重ね合わせ状態 $[\psi_1(x)+\psi_2(x)]/\sqrt{2}$ であり，両者間で干渉が起こる．その粒子 1 つがスクリーン上の位置 x に見出される確率密度は

$$P^{(1)}(x)=\frac{1}{2}|\psi_1(x)+\psi_2(x)|^2 \qquad (1)$$

で与えられ，これは図 2 (a) のような干渉パターンを示す．この実験を多数回行い，多数個の粒子の到着地点をスクリーン上に記録していくと，その干渉パターンがスクリーン上に浮かび上がる．

波動関数 $\psi_{1,2}(x)$ は，1 つの粒子の状態を表すものであり，この**二重スリットの干渉は，1 粒子の干渉**である．また，この干渉で重要なのは，2 つのスリットから広がる波動関数の位相差が定まっていることである．このことは，粒子源が 1 つで，そこからそれぞれのスリットまでの距離が決まっていることで保証されている．

これに対し，図 2 (b) のように，二重スリットの代わりに同じ種類の粒子を放出する粒子源を 2 つ（S1 と S2）用意し，それらが互いに無関係なタイミングで粒子を発射する場合はどうだろう．スクリーン上のある点に粒子が 1 つ到着したとする．その粒子が粒子源 S1 から来たのか S2 から来たのかがわからなければ，その粒子の状態は S1 から来た状態 $\psi_{\mathrm{S1}}(x)$ と S2 から来た状態 $\psi_{\mathrm{S2}}(x)$ の重ね合わせ状態であり，スクリーン上の位置 x に粒子が見出される確率は $|\psi_{\mathrm{S1}}(x)+\psi_{\mathrm{S2}}(x)|^2/2$ で与えられる．次にやって来る粒子も同様の重ね合わせ状態になるが，S1 と S2 が粒子を放つタイミングは互いに無関係なので，2 つの波動関数の位相は一般に先ほどとは異なり，$|\psi_{\mathrm{S1}}(x)+e^{i\phi}\psi_{\mathrm{S2}}(x)|^2/2$ のように相対位相がずれた存在確率分布になる．次々にやって来る粒子はそれぞれに異なる位相差で干渉しており，そんな粒子たちの到着位置をスクリーン上に重ね焼きして得られる分布は

$$\begin{aligned}P^{(1)}(x)&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{2\pi}|\psi_{\mathrm{S1}}(x)+e^{i\phi}\psi_{\mathrm{S2}}(x)|^2\\&=\frac{1}{2}[|\psi_{\mathrm{S1}}(x)|^2+|\psi_{\mathrm{S2}}(x)|^2] \qquad (2)\end{aligned}$$

と書けて，干渉縞がかき消された分布が得られる．このように，干渉縞が生じるには，**2 つの波動関数の相対位相が定まっていることが重要**である．

ところが，そんな粒子放出のタイミングに協調

性がない粒子源2つの場合でも，粒子を1つずつとらえるのではなく，2カ所で1つずつ同時にとらえる回数を数える実験（**同時計数実験**）を考えると，干渉縞が浮かび上がる．位置 x_1 に設置された粒子検出器 D1 と x_2 の D2 がそれぞれ粒子を1つずつとらえたとしよう．2つの粒子源が同じ種類の粒子を放出するものであれば，D1 と D2 でとらえられた粒子はどちらの粒子源からやって来たかわからない．それぞれの粒子源が2つの粒子を同時に放出することがまれであれば，次の2つの可能性が考えられる［図2(c)］．1つの粒子は S1 から D1 にやって来て，もう1つは S2 から D2 にやって来た可能性，そして，1つは S1 から D2 にやって来て，もう1つは S2 から D1 にやって来た可能性である．この両者の判別がつかなければ，2つの粒子の状態はそれらの重ね合わせ状態

$$\Psi^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{\mathrm{S1}}(x_1)\psi_{\mathrm{S2}}(x_2)+\psi_{\mathrm{S1}}(x_2)\psi_{\mathrm{S2}}(x_1)] \quad (3)$$

になる．ただし，ここでは「**ボース粒子**」に分類される粒子を想定しており，この2粒子波動関数が粒子の入れ替えに対して対称 $\Psi^{(2)}(x_1,x_2) = \Psi^{(2)}(x_2,x_1)$ になるように重ね合わせ方に気をつけた．「**フェルミ粒子**」であれば，反対称 $\Psi^{(2)}(x_1,x_2) = -\Psi^{(2)}(x_2,x_1)$ になるように重ね合わさなければならない．いずれにせよ，2つの粒子がそれぞれ x_1 と x_2 で見出される確率は

$$P^{(2)}(x_1,x_2) = |\Psi^{(2)}(x_1,x_2)|^2 \quad (4)$$

で与えられるが，これは，例えば x_1 を固定して x_2 を動かすと干渉パターンを示す．その例は，後ほど図4で見る．この干渉は，二重スリットの干渉が1粒子の干渉だったのに対し，いわば**2粒子の干渉**である．そして，前者が波動関数 $\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ の位相差に敏感だったのに対し，後者は $\psi_{\mathrm{S1}}(x)$ と $\psi_{\mathrm{S2}}(x)$ の位相差がふらついても影響を受けない点が特筆に値する．実際，$\psi_{\mathrm{S2}}(x)$ に定位相 $e^{i\phi}$ をつけても，式(4)の $P^{(2)}(x_1,x_2)$ は変化しないことを簡単に確認できるだろう．

3. BEC とコヒーレント状態と粒子数確定状態

さて，いよいよ BEC の干渉の話に入ろう．2つの独立な BEC を重ねると，干渉縞が観測される．前節で見たような2つの独立な粒子源から放出される粒子の干渉実験で干渉が起こっているような状況に見える．この現象は普通でない．

BEC は，基底状態をマクロな数のボース粒子が占有している状態である．簡単のため，原子気体を構成する N 個の粒子がすべて基底状態を占有している状態 $|N\rangle$ を考えよう．この状態に，基底状態の粒子を1つ消す消滅演算子 $\hat{a}_0$ を作用すると，粒子数が1つ少ない $|N-1\rangle$ になるが，N が大きければ，$N-1 \simeq N$ と近似してもよいだろう[1]．係数にも注意して書くと，

$$\hat{a}_0|N\rangle = \sqrt{N}e^{i\phi}|N-1\rangle \simeq \sqrt{N}e^{i\phi}|N\rangle. \quad (5)$$

この最左辺と最右辺に注目すると，$\hat{a}_0$ の固有値方程式の形になっている．消滅演算子の固有状態はコヒーレント状態と呼ばれ[4]，したがって，BEC は近似的にコヒーレント状態にあるといえる．これを $|\alpha_\phi\rangle$ と書こう．すなわち，

$$\hat{a}_0|\alpha_\phi\rangle = \sqrt{N}e^{i\phi}|\alpha_\phi\rangle. \quad (6)$$

多粒子系を扱う場の量子論の処方箋では，場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ を完全正規直交系で展開し，展開係数をボース／フェルミ粒子の消滅演算子にする：

$$\hat{\psi}(x) = \hat{a}_0\varphi_0(x) + \hat{a}_1\varphi_1(x) + \cdots. \quad (7)$$

$\hat{a}_n$ は，第 n 準位の消滅演算子である．もちろん，ここではボース粒子を念頭に置いている．さて，BEC がコヒーレント状態 $|\alpha_\phi\rangle$ で記述されると思って（励起状態の占有数は 0），場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ の期待値を計算すると，

$$\langle\alpha_\phi|\hat{\psi}(x)|\alpha_\phi\rangle = \sqrt{N}e^{i\phi}\varphi_0(x). \quad (8)$$

系は位相変換 $\hat{\psi}(x) \to \hat{\psi}(x)e^{i\phi}$ に対して不変で，どの位相値も平等なのに対し，この期待値はその位相変換に対して不変でない．この状態では特定

の位相 ϕ が選ばれていて，**系の対称性が破れている**．ここに現れた波動関数 $\Psi(x)=\sqrt{N}e^{i\phi}\varphi_0(x)$ は，**「巨視的波動関数」**と呼ばれる．

これに対し，上述のような近似を認めず，BEC がきっちり $|N\rangle$ で記述されると思って同じ期待値を計算すると，$|N\rangle$ と $|N-1\rangle$ は直交するので，

$$\langle N|\hat{\psi}(x)|N\rangle = 0 \tag{9}$$

となる．この状態では巨視的波動関数は顔を出さず，位相変換に対する対称性は保たれている．コヒーレント状態 $|\alpha_\phi\rangle$ が，位相が ϕ に確定した状態なのに対し，この粒子数確定状態 $|N\rangle$ では位相は定まっていない．**位相と粒子数の間にはこのような不確定性関係が存在する．**

この違いは，BEC の干渉の議論に大きく影響する．粒子数が N の BEC を 2 つ（A と B）独立につくり，それらを重ねることを考えよう．BEC 間で粒子は行き来できないものとし，それぞれのエネルギー固有状態の波動関数 $\{\varphi_n^A(x),\varphi_n^B(x)\}$ で場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ を展開しよう：

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \hat{a}_0\varphi_0^A(x)+\hat{a}_1\varphi_1^A(x)+\cdots\\ &\quad +\hat{b}_0\varphi_0^B(x)+\hat{b}_1\varphi_1^B(x)+\cdots.\end{aligned} \tag{10}$$

$\hat{a}_n$ ($\hat{b}_n$) は A (B) の中の n 番目の準位の消滅演算子である．この重なり合う BEC の雲の中で 1 つの粒子の存在確率分布「1 粒子分布」$P^{(1)}(x)$ を計算しよう．それは，場の量子論の処方箋によると

$$P^{(1)}(x)=\frac{1}{2N}\langle\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\rangle \tag{11}$$

で与えられる．この期待値を，2 つの BEC がともにコヒーレント状態の $|\alpha_{\phi_A},\alpha_{\phi_B}\rangle$ で記述されるものと思って計算すると，

$$P^{(1)}(x)=\frac{1}{2}|\varphi_0^A(x)e^{i\phi_A}+\varphi_0^B(x)e^{i\phi_B}|^2. \tag{12}$$

これは，二重スリットの干渉で登場した式 (1) に対応するものであり，干渉縞が生じる．一方，2 つの BEC がいずれも粒子数確定状態の $|N,N\rangle$ で記述されると思って計算すると，

$$P^{(1)}(x)=\frac{1}{2}[|\varphi_0^A(x)|^2+|\varphi_0^B(x)|^2] \tag{13}$$

となって，式 (2) のように干渉縞のない分布が予言される．コヒーレント状態では BEC の位相がそれぞれ ϕ_A と ϕ_B に確定しているため，それらの相対位相 $\phi_A-\phi_B$ もはっきりしていて，したがって干渉できるのに対し，粒子数確定状態ではそれぞれの BEC の位相が確定しておらず，相対位相もはっきりしないため，干渉縞が生じないのである．実験で干渉縞が観測されたということは，BEC はコヒーレント状態なのだろうか？ 粒子数をきっちり数えて BEC をつくると，干渉しない BEC になってしまうのだろうか？

4. スナップショットに干渉縞

これに対し，Javanainen と Yoo は，2 つの BEC がそれぞれ粒子数確定状態にあっても干渉縞が生じると主張した[5]．まず，**量子力学というのは，基本的に，同じ実験を多数回行った結果の重ね焼きを予言するもの**であることに注意しよう．前節で，BEC を粒子数確定状態で記述した場合，干渉縞は生じないことが予言されたが，それは，BEC を重ねる実験を何度も行い，その都度撮像して得られる写真をすべて重ね焼きした結果に干渉縞は生じないと言っているに過ぎない．Javanainen と Yoo は，重ね焼きに干渉縞が見られなくても，**1 枚 1 枚の写真には干渉縞が生じている**ことを示した（図 3）[5]．重要なのは，BEC の写真を撮るという行為が，二重スリットの干渉で議論したような粒子を 1 つずつ投入する実験とは異なって，**多数の粒子を同時に観測している**点にある．

Javanainen と Yoo は，次のような設定で議論した[5]．1 次元空間中で外力も粒子間力も受けずに運動する同じ種類のボース粒子の集団を考える．$N/2$ 個の粒子は運動量が p_0 の状態にあり，残りの $N/2$ 個は $-p_0$ の状態にあるとする．粒子数が確定した 2 つの BEC が重なり合っているような状況である．このとき，総勢 N 個の粒子が位置 $\{x_1,\ldots,x_N\}$ に見出される確率は，場の量子論の処方箋によると，「N 粒子分布」

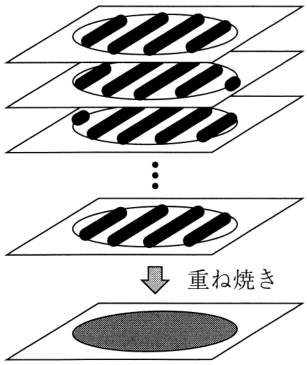


図 3　重ね焼きに干渉縞が見られなくても，実験ごとに撮像される像には干渉縞が生じている．

$$P^{(N)}(x_1, \ldots, x_N) \propto \langle \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) \hat{\psi}(x_N) \cdots \hat{\psi}(x_1) \rangle \quad (14)$$

に比例する．これを上の設定で計算し，その確率に従ってコンピュータ上で N 個の乱数 $\{x_1, \ldots, x_N\}$ を発生して（すなわち，N 個の粒子を 1 次元空間上にばらまいて），それがどのような分布になるかを見た．それが 1 枚の写真の像に相当する．すると，毎回，確実にきれいな振動パターンの粒子分布が得られた．そのパターンは試行ごとに位置がずれるが，いずれも同じ縞間隔の干渉パターンだった．こうした試行を多数回行い，得られる分布をすべて重ね焼きすれば，干渉縞のない像になる（図 3）．

1 枚 1 枚の写真に干渉縞が生じるのは，第 2 節で触れた 2 粒子干渉を一般化した「**多粒子干渉**」の効果である．Javanainen と Yoo の設定で，重なり合う原子雲の中で粒子が位置 x_1 に見出される確率，1 粒子分布 $P^{(1)}(x_1)$ を計算すると，それは x_1 によらず一定である．それぞれの粒子は運動量確定状態にあり，位置は全く不確定だからである．そして，粒子が 1 つどこか x_1 に見出されると，この条件下での 2 つ目の粒子の存在確率分布は，「2 粒子分布」$P^{(2)}(x_1, x_2)$ で決まる．今の場合，それは，式 (14) に従って計算すると

$$P^{(2)}(x_1, x_2) \propto 1 + \frac{N}{2(N-1)} \cos\left[\frac{2p_0}{\hbar}(x_1 - x_2)\right] \quad (15)$$

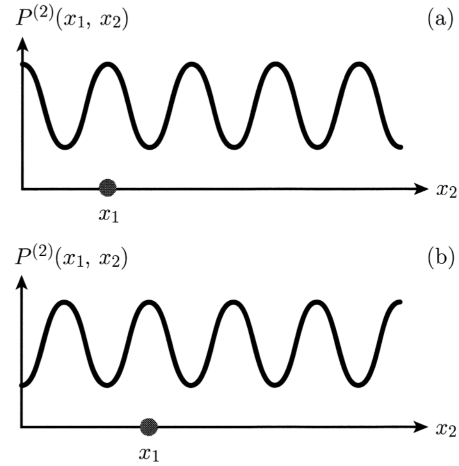


図 4　1 つ目の粒子が x_1 に見出されたとき，2 つ目の粒子の存在確率分布は振動パターンを示す．x_1 の位置が異なれば，その確率分布はそれに応じてシフトする．

で与えられ，図 4 のように振動パターンを示す．つまり，2 つ目の粒子は好き勝手なところに存在できず，1 つ目の粒子が見つかった位置に応じて見つかりやすい位置にむらが生じる．3 つ目も同様に最初の 2 つの位置の影響を受け，4 つ目も …… のように積上がった結果が，1 枚の写真に写る干渉縞パターンである．そして，このパターンは，最初の粒子が見つかる位置 x_1 に応じて図 4 のように全体がシフトする．このため，実験ごとにシフトした干渉パターンがランダムに出現するのである．

もともと，粒子数確定状態の BEC は位相が確定しておらず，様々な位相の状態が混ざった状態にある．そんな BEC の雲を撮像すると，その 1 枚の写真に干渉縞が浮かび上がる．ある特定の位相差の状態が，観測によって選ばれたということができる．あるいは，観測の結果，位相差が確定した状態へと波動関数が収縮したともいえる．このようにして出現する干渉は，「**観測による干渉**」などと呼ばれることがある[6]．

5. 量子力学でスナップショットを議論する

この「観測による干渉」の話題の面白いところは，量子力学が多数回試行の重ね焼きを予言する

枠組みなのに対し，**1回の試行を語らなければならない**ところにある．どうしたら，量子力学の枠組みでこれを議論することができるだろうか？ そのアイデアを紹介しよう[7,8)]．

前節でも述べたように，普通に多数回試行の重ね焼きをしてしまうと干渉縞をとらえることはできない．しかしながら，Javanainen と Yoo の数値実験を見ていると，1枚1枚の写真には確実に干渉縞が浮かび上がる．それも，いずれの干渉縞も，その位置は毎回シフトするものの，同じ干渉縞間隔で生じる．この圧倒的多数のスナップショットに共通の特徴のみを抽出し，ランダムな要素を取り除けば，その特徴は重ね焼きしてもかき消されずに残るだろう．そして，その特徴が試行ごとに揺らがないことを確認できれば，すべてのスナップショットに確実にその特徴が現れることを結論できる．これが基本的なアイデアである[8)]．

原子気体中の N 個のボース粒子をそれぞれ位置 $x_1,\ldots,x_N$ に同時に見出す確率は，式(14)の N 粒子分布関数 $P^{(N)}(x_1,\ldots,x_N)$ で決まる．その確率に従ってある粒子配置 $\{x_1,\ldots,x_N\}$ が実現したとき，その粒子分布は

$$\rho(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i) \tag{16}$$

で与えられる．これが，1枚の写真に写る像に相当する．そこに干渉パターンが生じているかを調べるために，フーリエ変換を見よう：

$$\tilde{\rho}(k)=\int dx\,\rho(x)e^{-ikx}. \tag{17}$$

きれいな干渉縞が生じていれば，$\tilde{\rho}(k)$ はある波数のところにシャープなピークを持つだろう．Javanainen と Yoo の数値実験を信じれば，そのピークは，試行ごとに撮られるいずれの写真でも同じ波数のところに立つだろう．ただし，干渉縞のパターンは毎回ランダムにずれる．その空間的なずれは，波数空間では位相因子として現れる．したがって，$|\tilde{\rho}(k)|^2$ のように絶対値を取れば，そのランダム因子を取り除くことができる．こうしておいてから，多数回試行の重ね焼きをしよう．それは，あらゆる粒子配置について，確率分布の重みをつけて平均することに他ならない：

$$\begin{aligned}S(k)&=\overline{|\tilde{\rho}(k)|^2}\\&=\int dx_1\cdots dx_N\,P^{(N)}(x_1,\ldots,x_N)|\tilde{\rho}(k)|^2.\end{aligned} \tag{18}$$

1枚1枚の写真に浮かび上がる干渉パターンのスペクトル・ピークは，この平均スペクトルでも生き残るだろう．さらに，このスペクトルの揺らぎ

$$C(k,k')=\overline{|\tilde{\rho}(k)|^2|\tilde{\rho}(k')|^2}-\overline{|\tilde{\rho}(k)|^2}\cdot\overline{|\tilde{\rho}(k')|^2} \tag{19}$$

を計算し，これが $C(k,k')\sim 0$ であることが確認されれば，平均スペクトル $S(k)$ に見られるスペクトル・ピークがいずれの写真でも生じていること，すなわち，スナップショットにその波数の干渉縞が生じていることを結論できる[8)]．

式(16)–(17)を式(18)や(19)に代入し，

$$\begin{aligned}&\int dx_l\,P^{(N)}(x_1,\ldots,x_l,\ldots,x_N)\\&=P^{(N-1)}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_N)\end{aligned} \tag{20}$$

の関係式を使うと，平均スペクトル $S(k)$ や揺らぎ $C(k,k')$ は，

$$S(k)=\frac{N-1}{N}I^{(2)}(k)+\frac{1}{N}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}C(k,k')&=\frac{(N-1)!}{N^3(N-4)!}I^{(4)}(k,k')\\&\quad-S(k)S(k')+O\left(\frac{1}{N}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

と書けることがわかる[8)]．ただし，

$$I^{(2)}(k)=\int dx_1\,dx_2\,P^{(2)}(x_1,x_2)e^{ik(x_1-x_2)}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}I^{(4)}(k,k')=\int\prod_{l=1}^{4}dx_l\,P^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\\times e^{ik(x_1-x_2)+ik'(x_3-x_4)}.\end{aligned} \tag{24}$$

つまり，平均スペクトル $S(k)$ は2粒子分布 $P^{(2)}$

(x_1, x_2), 揺らぎ $C(k,k')$ は 4 粒子分布 $P^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ に支配されており，N 粒子分布関数 $P^{(N)}(x_1, \ldots, x_N)$ を計算する必要はない．

この枠組みを，前節の Javanainen と Yoo のモデルに適用してみよう．すると，

$$S(k) = \frac{N-1}{N}\delta_{k,0} + \frac{1}{4}(\delta_{k,2p_0/\hbar} + \delta_{k,-2p_0/\hbar}) + \frac{1}{N}, \tag{25}$$

$$C(k,k') = O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{26}$$

となり，$k = 2p_0/\hbar$ の波数，すなわち，$\lambda = \pi\hbar/p_0$ の縞間隔の干渉パターンが，$N \to \infty$ の極限では揺らぎなく，つまり，いずれのスナップショットにも生じることがわかる．しかも，1/4 というスペクトル強度は，その干渉縞のコントラストが 1 であることを意味している［平均スペクトル $S(k)$ の平方根を取って，フーリエ逆変換してみよ］．この解析から，スナップショットに確実に干渉縞が観測されるためには，同時に観測する粒子の数 N が大きいことが重要であることも確認できる．

6. おわりに

物理学者は，私たちの自然界を説明する最も基本的な理論を，系の対称性をとことん追究することで作り上げてきた．それはシンプルで，とても美しくできている．一方で，身の周りを見てみれば，実に様々な現象が起こっていて，私たちは決して飽きることがない．単純な基本法則から，どうしてこんなにも豊かな自然が発現できるのだろうか．

そのカギを握る 1 つのキーワードは，マクロな系で見られる「**対称性の破れ**」である．1977 年のノーベル物理学賞を受賞した Anderson は，"**More Is Different**" と言って，その重要性を強調した[9)]．磁石は対称性を破って磁化しており，超伝導現象も対称性を破って発現している．素粒子の質量はヒッグス粒子が対称性を破ることでもたらされ，CP 対称性が破れているためにこの宇宙には粒子の方が反粒子よりも多く存在している．

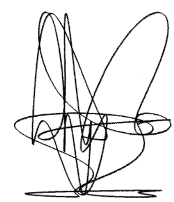
BEC が様々な興味深い性質を示すのも対称性の破れに起因しており，ここで取り上げた干渉現象にも対称性の破れは深く関わっていた．そんな対称性の破れたマクロ状態は「観測」によってもたらされるのだ，というのがここでの話題だった．実は，超伝導状態の対称性の破れも，「観測によるコヒーレンス」として導くことができる．この豊かな自然界は「観測」によって実現されている？とは言い過ぎかもしれないが，これまで「対称性の破れ」で語られてきたことがらを「観測」で読み替えていくと，この自然界の見え方が違ってくるかもしれない．

参考文献

1) L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
2) C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
3) M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Science* **275**, 637 (1997).
4) D.F. Walls and G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1994); M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
5) J. Javanainen and S.M. Yoo, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 161 (1996).
6) A.S. Parkins and D.F. Walls, *Phys. Rep.* **303**, 1 (1998).
7) A. Imambekov, V. Gritsev, and E. Demler, in *Ultra-Cold Fermi Gases, International School of Physics "Enrico Fermi"*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (IOS, Amsterdam, 2007), Vol. 164, pp. 535–606.
8) M. Iazzi and K. Yuasa, *Phys. Rev. A* **83**, 033611 (2011).
9) P.W. Anderson, *Science* **177**, 393 (1972).

（ゆあさ・かずや，早稲田大学高等研究所）

量子フィードバック制御の数理



山本　直樹

1. はじめに：古典系のフィードバック制御

日常的な，古典（＝非量子）の世界では，我々は常に高度なフィードバック（FB）制御を行っている．例えば，夏場，ある部屋の温度 x_t を調整したいとする．そして，x_t の時間変化が微分方程式

$$\frac{dx_t}{dt} = 2x_t + u_t \tag{1}$$

でモデル化されているとする．u_t は制御量で，エアコンによる温度調整を表す．エアコンを動かさない ($u_t = 0$) と，室温は上昇し続ける：$x_t = x_0 e^{2t} \to \infty$．いま，$x_t$ が温度計により誤差なく測定できるとする．よほどおかしな温度計を使わない限り，温度を測定するという行為自体は室温を変化させない．制御量にこの情報（測定値）を使わない手はない．そこで，$u_t = -3x_t + u_0$ としてみる．すると，$x_t = (x_0 + u_0)e^{-t} + u_0 \to u_0$ となって，設定温度 u_0 へ変化させることができる．このFB制御がかかっている限りは，誰かが一時的に部屋の窓を開け，熱風が入り込んできて室温が3℃上がったとしても，FB制御の効果で再び設定温度 u_0 が達成される．つまり，FB制御は未知外乱に対してロバスト性がある．それはひとえに，時間連続的な室温の測定・制御を行っていることによる．

上では測定値＝室温 x_t としたが，現実的には

$$y_t = x_t + 0.5\xi_t \tag{2}$$

のような，ノイズ ξ_t を受けた測定値 y_t が得られることになる．FB制御はこの測定値に基づいて設計することになる．つまり，u_t は y_t の関数となる．どのように u_t を設計すればよいだろうか？ 安直な，しかし有効であろう答えは次である：すなわち，x_t が直接使えないのであるから，その**推定値** $\tilde{x}_t$ で代用する．当然，$\tilde{x}_t$ は y_t の関数である．とくに，ξ_t が標準偏差1℃の正規白色ノイズであるとき，ある意味で最適な推定値 $\tilde{x}_t$ が次の方程式で算出できる：

$$\frac{d\tilde{x}_t}{dt} = 2\tilde{x}_t + u_t + 4p_t(y_t - \tilde{x}_t), \quad \frac{dp_t}{dt} = 4p_t(1 - p_t). \tag{3}$$

これは，y_t から余分なノイズを取り除くという意味で**フィルター**と呼ばれる．フィルターの構造と「最適」の意味は後で明らかになる．$\tilde{x}_t$ は x_t の代用とみなせるので，単純に $u_t = -3\tilde{x}_t + u_0$ としてみる．すると，制御された室温 x_t は，標準偏差1.7℃の誤差をもって設定温度 u_0 のまわりをゆらぐことになる．

(3) 式の出どころ等は省略せざるを得ないが，ともかく，FB制御が上手くいくには「良い」推定を行う必要がある．良い推定値とは，それを用いると，図1で示す制御系全体が安定に，かつ所望の振舞いを示すようなもの，である．上で示した通り，良い推定値は古典の場合は存在するが，量子の場合ではどうだろうか？ 読者は，量子系は測定すると壊れて，その「状態」が別のものに確率的にジャンプする，と聞いたことがあるかもしれない．上の例の場合，室温が測定した瞬間に変化する，ということだろうか？ そのような対象をFB制御できるだろうか？ 結局，量子FB制御をちゃんとやるには，そもそも測定や状態とは何であるのか，推定と測定とはどう違うのか，量子で良い（あるいは最適な）推定はできるのか，といった根本的な問題に立ち返る必要がある．であるから，本稿では，過

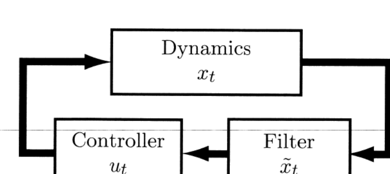


図1　古典フィードバック制御系のスキーム．

分とは思うがそういった基礎事項の説明に大部を割きたい．5 節までは学部学生でも計算を追えるようにしたつもりである．6, 7 節はややアドバンストな内容であるが，気楽に読んでもらえたらと思う．

2. 確率論—量子論を意識して

2.1 簡単な復習

表，裏が出る確率がそれぞれ p_1, p_2 であるようなコインを 2 枚投げる．コインを区別しないとき，面の出方を（根元）**事象**とする確率分布は $\mathbb{P}(\text{表表}) = p_1^2$, $\mathbb{P}(\text{表裏}) = 2p_1p_2$，$\mathbb{P}(\text{裏裏}) = p_2^2$ となる．確率変数とは，一般に事象 ω に応じて**実現値** $A(\omega)$ が定まる “関数” のことで，ここでは次の確率変数を取り上げる：

$$A(\text{表表}) = A(\text{裏裏}) = a_1, \quad A(\text{表裏}) = a_2.$$

確率変数 A を測定している Alice にとっては，2 枚のコインが同じ面か否かだけが事象として意味を持つわけである．さらに，次の確率変数 B を考える：

$$B(\text{表表}) = B(\text{表裏}) = b_1, \quad B(\text{裏裏}) = b_2.$$

B を測定している Bob にとっては，表が出るか否かが事象となる．さて当然, A と B は**両立する**．つまり, 例えば A が a_1 を, B が b_2 をとる事象が存在する．実際，それは「裏裏」という事象であり，そして測定者たちがこの結果を得る**同時確率**は $\mathbb{P}(A = a_1,\ B = b_2) = p_2^2$ となる（$A(\text{裏裏}) = a_1$ などと書くべきだが，略記した）．さらに，次のような状況が考えられる．Bob が測定結果 b_j を得たとする．彼は Alice の測定結果を知らない．しかし，このとき彼は，この新たな知識を用いて Alice の測定値に関する確率分布を更新することができる．それが，次の**条件付き確率分布**である：$\mathbb{P}(A = a_i|B = b_j) = \mathbb{P}(A = a_i,\ B = b_j)/\mathbb{P}(B = b_j)$. 例えば，$\mathbb{P}(A = a_1|B = b_2) = 1$ がわかりやすい．

2.2 定義関数による表現

確率論では，**定義関数**が非常に役に立つ．これは，ある注目している事象が起これば 1 を，そうでなければ 0 を返す確率変数である．いま A は 2 通りの結果を返すので，それに付随する定義関数も 2 種類ある：

$$\chi_1(\text{表表}) = \chi_1(\text{裏裏}) = 1, \quad \chi_1(\text{表裏}) = 0,$$

$$\chi_2(\text{表表}) = \chi_2(\text{裏裏}) = 0, \quad \chi_2(\text{表裏}) = 1.$$

本稿では，これらを次のような対角行列で表現する：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{1,\ 0,\ 1\}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{0,\ 1,\ 0\}.$$

行列の第 1, 2, 3 対角成分がそれぞれ表表，表裏，裏裏に対応する．以降，確率変数 χ_i とその行列表現 P_i を同一視する．つまり，コインを 2 枚投げると行列の対角成分のどれかが選ばれ，“確率変数” P_i は，その結果に応じて 1 か 0 を返す．ここで，行列和 $P_1 + P_2 = I$ は事象の総和が全事象であること，行列積 $P_1P_2 = 0$ は P_1 が 1 をとる事象と P_2 が 1 をとる事象が背反であることを意味する．さらに，$P_i^2 = P_i$ であるから，P_i は**射影行列**である．そして，確率変数 A が a_i をとることと P_i が 1 をとることは等価なので，A は

$$A = \sum_i a_i P_i \tag{4}$$

と行列表現できる．実際，例えば $A(\text{裏裏}) = \sum_i a_i P_i(\text{裏裏}) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1$ と計算できる．同様に，B に付随する定義関数には,

$$Q_1 = \mathrm{diag}\{1,\ 1,\ 0\}, \quad Q_2 = \mathrm{diag}\{0,\ 0,\ 1\}$$

なる対角行列が対応し，$B = \sum_j b_j Q_j$ と表せる．さらに，確率分布も対角行列で表しておく：

$$\rho = \mathrm{diag}\{p_1^2,\ 2p_1p_2,\ p_2^2\}.$$

定義関数を使っていろいろ計算してみよう．まず，P_i の平均は，（根元）事象ごと，つまり対角成分ごとに P_i がとる値（0 か 1）に確率を重みづけして足し合わせたものなので，$\mathbb{E}(P_i) = \mathrm{Tr}(\rho P_i)$ を得る．Tr は行列の対角成分の和を表す（トレース）．一方，$\mathbb{E}(P_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(P_i = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(P_i = 0)$ であるから，$\mathbb{P}(P_i = 1) = \mathrm{Tr}(\rho P_i)$ が成立する．A が a_i をとるとき P_i は 1 をとるので，結局，次式を得る：

$$\mathbb{P}(A = a_i) = \mathbb{P}(P_i = 1) = \mathrm{Tr}(\rho P_i). \tag{5}$$

これを用いると，A の平均は $\mathbb{E}(A) = a_1\mathbb{P}(A = a_1) + a_2\mathbb{P}(A = a_2) = \mathrm{Tr}(\rho A)$ と表せる．同様に，B については $\mathbb{E}(B) = \mathrm{Tr}(\rho B)$ となる．

行列表現を用いると，2 つの事象が同時に起こることが 2 つの行列の積で表現できる．つまり，A が a_i を，B が b_j をとるという事象は，P_iQ_j が 1 をとるという事象と等価である．ゆえに,

$$\mathbb{P}(A{=}a_i, B{=}b_j) = \mathbb{P}(P_iQ_j{=}1) = \mathrm{Tr}(\rho P_i Q_j) \tag{6}$$

と書ける．先の計算 $\mathbb{P}(A = a_1,\ B = b_2) = p_2^2$ を確認されたい．さらに，上式より条件付き確率が

$$\mathbb{P}(A = a_i|B = b_j) = \frac{\mathbb{P}(A = a_i,\ B = b_j)}{\mathbb{P}(B = b_j)} = \frac{\mathrm{Tr}(\rho P_i Q_j)}{\mathrm{Tr}(\rho Q_j)} = \mathrm{Tr}\Big[\frac{Q_j \rho Q_j}{\mathrm{Tr}(\rho Q_i)} P_i\Big]$$

と計算できる．ここで，P_i と Q_j が交換すること，および $Q_j^2 = Q_j$ を用いた．従って，(5) 式から，Bob が結果 b_j を得たという条件の下での，Alice が得る値の条件付き確率分布は，次式で表せる：

$$\rho_j = \frac{Q_j \rho Q_j}{\mathrm{Tr}(\rho Q_j)}. \tag{7}$$

2.3 条件付き平均と最適推定

Bob が，自身が得た測定結果をもとに Alice の測定値を「推定」したいとする．つまり，その推定値を f_1，f_2 と書けば，「表表 or 表裏」が出たら f_1 を，「裏裏」が出たら f_2 をとるような確率変数 $\pi(A) = f_1 Q_1 + f_2 Q_2$ を考えることになる．このような確率変数は，B とは異なる値をとるが事象への反応の仕方は B と同じということで，B の仲間である．数学的には，B が生成する σ 加法族に可測である，という．欲しいものは，B の仲間たちのうち，A にある意味で最も近い「最適推定値」である．いま，B が b_j をとったときに A は f_j をとっている，と推測するわけであるが，一方，このとき A は確率 $\mathbb{P}(A = a_i | B = b_j)$ で a_i をとることがわかっている．なので，f_j として，B が b_j をとったという条件の下での a_i の平均

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_i a_i \mathbb{P}(A = a_i | B = b_j) = \sum_i a_i \mathrm{Tr}(\rho_j P_i) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\rho_j \sum_i a_i P_i\Big) = \mathrm{Tr}(\rho_j A) \end{aligned}$$

を採用することが自然であろう．すなわち，

$$\mathbb{E}(A|B) = \sum_j f_j Q_j = \sum_j \mathrm{Tr}(\rho_j A) Q_j \tag{8}$$

をもって A の推定値とする．これを，B に条件付けられた A の**条件付き平均**と呼ぶ．平均と名前がついているが，これは確率変数である．いまの場合，

$$\mathbb{E}(A|B) = \frac{p_1 a_1 + 2p_2 a_2}{p_1 + 2p_2} Q_1 + a_1 Q_2$$

となる．Q_2 が 1 をとった（裏裏が出た）なら，A は必ず a_1 をとるので，これは合理的である．

最後に，2 点，リマークする．まず，推定値の平均は実際に A がとる値の平均と一致している：$\mathbb{E}[\mathbb{E}(A|B)] = \mathbb{E}(A)$．つまり，$\mathbb{E}(A|B)$ は**不偏推定**となっている．この性質より，すべての B の仲間たちの確率変数 Z（すなわち，$Z = z_1 Q_1 + z_2 Q_2$ の形の確率変数）について，次式が成立する：

$$\mathbb{E}\big[\big(A - \mathbb{E}(A|B)\big)^2\big] \leq \mathbb{E}\big[(A - Z)^2\big]. \tag{9}$$

つまり，条件付き平均は，2 乗平均推定誤差を最小とする最適推定値であったわけである．次に，第 1 節での例題との関連について述べる．まず，x_t が A に対応する．一方で，B に対応するものは y_t ではなくその履歴 $\mathcal{Y}_t = \{y_s \mid 0 \leq s \leq t\}$ である．過去から現在までの全情報を駆使して $\tilde{x}_t = \mathbb{E}(x_t \mid \mathcal{Y}_t)$ を計算し，x_t を推定するわけである．実際，フィルター (3) は，これをリカーシヴに算出するものである．

3. 量子論—確率論の観点から

3 次元空間の粒子集団を考える．1 つの粒子は，スピンと呼ばれる内在的な（回転のアナロジーをもつ）変数を有する．この粒子たちが，全体でどれほどの角運動量をもっているのかに興味があるとしよう．まず，Alice が x 軸まわりの全角運動量 J_x を測定する（測定法は棚上げしておく）．その測定値は一般に確率的に決まり，しかも $0, 1, 2, 3$ のような離散値となる．その理由についてはスキップして，とにかくここでは，J_x は確率変数なのだ，と納得していただきたい．確率変数で，いましかも測定値は離散値なので，それは (4) 式のような行列表現 $J_x = \sum_i a_i P_i$ をもつはずである．

一方，Bob は同じ粒子系に対して y 軸まわりの全角運動量 $J_y = \sum_j b_j Q_j$ を測定する．ここで，J_x と J_y が両立するか，という問題が生ずる．つまり，同時確率 $\mathbb{P}(J_x = a_i,\ J_y = b_j)$ は矛盾なく定義できるだろうか．それが可能であるためには，Alice-Bob の順で測定を行ってもその逆順でも，結果が等しくなければならない．しかしコインの場合と異なり，量子レベルの測定行為は，どのような機構でそれを行うにせよ対象に影響を与える．すなわち，Alice の測定は Bob の測定に影響を与え，逆もまた同様である．結局，2 つの確率変数 J_x，J_y は両立せず，量子の世界では一般には (6) 式を用いてはいけない，ということになる．

量子論では，この No-Go ルールを表現するために，行列 P_i，Q_j を交換しないものに置き換える．このとき $\mathrm{Tr}(\rho P_i Q_j) \neq \mathrm{Tr}(\rho Q_j P_i)$ であるから，(6) 式はもはや一般には使えない．事象の非両立性を，行列の非可換性に置き換えたわけである．もちろん，J_x しか相手にしないのであれば，行列 P_i は古典と同じルールに従って確率的な現象を記述しなければならない．この要請から，P_i は

$$P_i = P_i^*, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad \textstyle\sum_i P_i = I \tag{10}$$

を満たす複素射影行列となる（$*$：複素転置）．これらはそれぞれ，確率が非負実数値，排反事象の積は空事象，事象の総和＝全事象であることを意味する．

量子論のルールをまとめる．まず，確率変数は，対角行列に限らない複素射影行列 P_i を用いて (4) 式の形の行列（一般には無限次元作用素）で表される．実現値 a_i は測定を行うと一つ定まり，この意味で，量子論で測定値と言えばそれは確率変数の実現値を指す．無論 a_i は実数であり，従って，A はエルミート行列である．確率分布も対角とは限らない行列 ρ で表され，とくに (10) 式から $\rho=\rho^*\geq 0$, $\mathrm{Tr}(\rho)=1$ が従う．量子論では，確率変数は**物理量**，確率分布は**量子状態**と呼ばれる．そして，物理量が 1 つの場合はもちろん，複数出てきてもそれらが両立するならば，前節のすべての公式は成立する．当然，このとき物理量の推定は可能である．測定値は物理量固有の量であるが，推定値は我々が「設計」するものである．最適推定は，そのうちの一つの（不偏性があるなどの理由で良い）候補である．なお，量子状態の確率的ジャンプ (7) は，知識が更新されたことによって起こるものである．

4. 量子 2 体系の定式化

我々がやりたいことは，第 1 節の内容の量子版である．役者は 2 人いる：対象系（システム）の物理量 X および出力系（プローブ）の物理量 Y．最初，X と Y は無関係である．このとき，これらの物理量は，全体系においては $X\otimes I$, $I\otimes Y$ と表現される．一般に，$A\otimes B$ は第 (i,j) 要素が行列 $a_{ij}B$ である $\dim(A)\times\dim(B)$ 次元ブロック行列を表し，A, B のテンソル積と呼ばれる．これは，例えば 2 つのサイコロの出る目の事象数が $6\times 6=36$ 通りであることの一般化である．

さて，天下りであるが，閉じた量子系における物理量の時間変化はユニタリ変換 $A\rightarrow U^*AU$ で与えられる．いま，システムとプローブの全体に作用するユニタリ変換を用意して，これらを相互作用させる．このとき，各々の物理量は次式で変化する：

$$X'=U^*(X\otimes I)U=\sum_i x_iU^*(P_i\otimes I)U=\sum_i x_iP'_i,$$

$$Y'=U^*(I\otimes Y)U=\sum_j y_jU^*(I\otimes Q_j)U=\sum_j y_jQ'_j.$$

ただし，$X=\sum_i x_iP_i$, $Y=\sum_j y_jQ_j$ である．システム物理量が変化していることに注意されたい．つまり，量子の場合，システムに関する情報を抽出しようとすると，システムは一般にはこのような**反作用**を受ける．ともかく，いま明らかに X', Y' は両立する．ゆえに Y' を測定し，測定値をもとに X' がとる値を推定することができる．Y' に条件付けられた X' の条件付き平均は，(7), (8) 式から次式で与えられる：

$$\mathbb{E}(X'|Y')=\sum_j \mathrm{Tr}(\rho_jX')Q'_j,\quad \rho_j=\frac{Q'_j\rho Q'_j}{\mathrm{Tr}(\rho Q'_j)}.$$

Y' の測定値が y_j であるとき，X' がとる値の推定値が $\mathrm{Tr}(\rho_jX')$ である．なお，ρ は相互作用前のシステム–プローブ全体系の量子状態である．

以上では，物理量の変化に注目していた．この間，量子状態は固定であり，これはハイゼンベルグ描像と呼ばれる．一方，このプロセスを量子状態が変化したと考えても良い．これは，シュレーディンガー描像と呼ばれる．この場合，システム物理量は X で固定であるから，推定値を $\mathrm{Tr}(\rho_jX')=\mathrm{Tr}(\rho'_jX)$ と表すことで，変化後の量子状態 ρ'_j が次式のように求まる：

$$\rho'_j=\frac{(I\otimes Q_j)(U\rho U^*)(I\otimes Q_j)}{\mathrm{Tr}[(U\rho U^*)(I\otimes Q_j)]}. \qquad (11)$$

これが，相互作用とプローブの測定を経て更新された量子状態である．ここで，とくに Q_j が 1 次元空間への射影：$Q_j=|q_j\rangle\langle q_j|$ であるとする（$|q_j\rangle$ は縦ベクトルで，$\langle q_j|$ はその複素共役を表す）．さらに，初期状態が $\rho=\rho_s\otimes|\phi\rangle\langle\phi|$ のようにシステムとプローブで分離され，かつプローブ状態は単位ベクトル $|\phi\rangle$ で指定されているとする（**純粋状態**）．このとき，(11) 式は

$$\rho'_j=\frac{M_j\rho_sM_j^*}{\mathrm{Tr}(M_j^*M_j\rho_s)}\otimes|q_j\rangle\langle q_j| \qquad (12)$$

となる．ただし，$M_j:=\langle q_j|U|\phi\rangle$ であり，これはシステムに作用する行列である．

5. トイモデル—推定値の設計

前節に基づいて，量子 FB 制御のアイデアを示そう．システムとして，励起・基底の 2 通りのエネルギーを有する 2 準位原子を考える．これは数学的には表裏の 2 通りの出方をもつコインと同じであり，実際，この 2 準位エネルギーという物理量は $X=\sigma_z=\mathrm{diag}\{1,-1\}$ と表せる（励起・基底エネルギーをそれぞれ 1, −1 とした）．また，原子がどちらのエネルギーをとるかは確率的に決まるが，それを特徴付ける量子状態は $\rho_s=|\psi\rangle\langle\psi|$, $|\psi\rangle=(\cos\theta,\ \sin\theta)^\top$ のように純粋状態で指定されているとする．次に，プローブとして 1 光子をとり，その偏光成分に注目する．これもコインの表裏と数学的には同じで，あるプローブ物理量を測定すると 2 通りの結果が返ってくる．とくにここでは，

$$Y=\sigma_-+\sigma_-^*,\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

なる物理量を考える．これは $Y = Q_+ + (-1)Q_-$ のように射影行列 $Q_\pm$ を用いて分解でき，従って測定値は ± 1 となる．また，系は純粋状態 $\rho_p = |V\rangle\langle V|$ にあるとする．$|V\rangle = (0,1)^\top$ はプローブが垂直縦偏光状態にあることを表す（図 2 (a) 参照）．原子と光子の相互作用は，次のユニタリ行列 U で表されるとする：

$$U = e^{-iH}, \quad H = \lambda X \otimes i(\sigma_-^* - \sigma_-). \qquad (13)$$

H は**ハミルトニアン**と呼ばれる物理量である．パラメータ $\lambda > 0$ は相互作用の強さを表し，相互作用による縦偏光状態の回転角度に対応する（シュレーディンガー描像で書くと，相互作用後の状態は，原子のエネルギー基底・励起状態と光子の偏光角度 $\pm\lambda$ の縦偏光状態が "エンタングル" したものになっている）．なお，H にシステム物理量 X がそのまま現れているが，これにより $X' = U^* X U = X$ が成立する．つまり，H は**反作用回避ハミルトニアン**となっている．

さて，相互作用後のプローブ物理量 $Y' = U^* Y U$ の測定値は相互作用前と変わらず ± 1 であるが，その分布は原子状態に依存し，$\mathbb{P}(Y' = \pm 1) = \mathrm{Tr}(\rho Q'_\pm) = (1 \pm \sin(2\lambda)\cos(2\theta))/2$ となる（$\rho = \rho_s \otimes \rho_p$）．そして，測定結果に応じた $X' = X$ の推定値 $\pi_\pm(X')$ は

$$\pi_\pm(X') = \mathrm{Tr}(\rho_\pm X') = \frac{\cos(2\theta) \pm \sin(2\lambda)}{1 \pm \cos(2\theta)\sin(2\lambda)}$$

となる．λ を微小とすると，$\pi_\pm(X')$ は X の平均値（＝事前の推定値）$\mathbb{E}(X) = \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\sigma_z) = \cos(2\theta)$ から微小シフトした値 $\cos(2\theta) \pm 2\lambda \sin^2\theta$ を返す．つまり，推定値 $\pi_\pm(X')$ は X' の実現値 ± 1 の方向に少し動く（図 2 (a) 参照）．一方，$\lambda = \pi/4$ とセットすると推定値はジャンプし，$\pi_\pm(X') = \pm 1$ となる．このときの測定結果の分布 $\mathbb{P}(Y' = \pm 1) = (1 \pm \cos(2\theta))/2$ は，X が直接測定できたとしたときの分布 $\mathbb{P}(X = \pm 1)$ と一致し，つまりいわゆる**射影測定**が実現されている．

このように，また前述の通り，推定値とは目的に応じて適宜設計するものである．ここでの目的は，原子を制御して物理量 X' が確実に励起エネルギー値 $+1$ をとることとする．そのためには，推定値の変化の「傾向」がつかめるよう，λ を微小にとればよい．そして，推定値が -1 方向に変化したらこれが逆方向に変化するよう原子を FB 制御し，一方，推定値が $+1$ 方向に変化したら何もしない（図 2 (b) 参照）．実際，この「弱い相互作用-プローブの測定-システム物理量の推定- FB 制御」のプロセスを繰り返していけば，いつか推定値 $= 1$ となり，目的が達せられると考えられる．次節では，これを時間連続で記述するための統一的な枠組みを説明する．

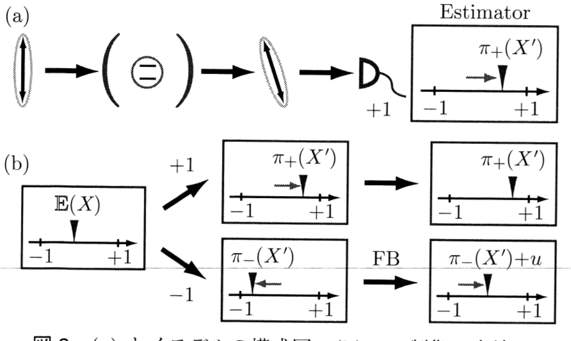


図 2　(a) トイモデルの模式図，(b) FB 制御の方法．

6. 量子フィルター

まずプローブから記述しよう．ここではとくに，1 モードのコヒーレント光（レーザー光）を考える．この光の場の進行軸を時間軸とみなし，ある微小時間 $[t, t+dt)$ に注目する．そして，この時間における消滅作用素を dA_t とかく．これは無限次元作用素で，真空状態 $|0\rangle$ に作用すると場を消滅させる：$dA_t|0\rangle = 0$．dA_t は物理量ではないが，$dW_t := dA_t + dA_t^*$ なる量はエルミート（自己共役というべきだが）となり，つまり物理量である．dW_t の測定は，実際には，それをある強い光とビームスプリッタで混ぜたあと，2 つの出力を各々フォトディテクタで検出し差分をとることで実行できる．dW_t の測定結果は，真空においては平均ゼロ，分散 dt の正規分布でばらつく．すなわち，

$$\mathbb{E}(dW_t^2) = \mathrm{Tr}(|0\rangle\langle 0|dW_t^2) = \langle 0|(dA_t + dA_t^*)^2|0\rangle$$
$$= \langle 0|(dA_t^2 + dA_t^* dA_t + dA_t dA_t^* + dA_t^{*2})|0\rangle = dt.$$

これと，先の $dA|0\rangle = 0$ を合わせることで，次の（真空中の）**量子伊藤則**が形式的に得られる：

$$dA_t dA_t = dA_t^* dA_t = dA_t^* dA_t^* = 0, \quad dA_t dA_t^* = dt.$$

次に，相互作用を記述する．微小時間 $[t, t+dt)$ において，システムとプローブがともに次のハミルトニアンに従って時間発展するとしよう：

$$dH = i(L \otimes dA_t^* - L^* \otimes dA_t) = i(L dA_t^* - L^* dA_t).$$

このように，今後しばしば記号 $\otimes$ を省略する．微小時間であることが，相互作用が弱いことに対応する．この微小時間における相互作用ユニタリ作用素は

$$U(t, t+dt) = e^{-idH} = e^{L dA^* - L^* dA} \qquad (14)$$

となる．これは，全時間 $[0,t]$ にわたる相互作用ユニタリ作用素 U_t と $U_{t+dt} = U(t, t+dt)U_t$ の関係にある．

システム物理量 $X = X \otimes I$ は，$j_t(X) := U_t^* X U_t$ と時間変化する．そして，上記の量子伊藤則から，$j_t(X)$ の微小変化は次の**量子確率微分方程式**で与えられる：

$$dj_t(X) = j_t(\mathcal{L}X)dt + j_t([L^*, X])dA_t + j_t([X, L])dA_t^*. \quad (15)$$

ただし，$\mathcal{L}X := i[H, X] + L^*XL - L^*LX/2 - XL^*L/2$ である．ここで，システムハミルトニアン $H = H \otimes I$ を追加しておいた．一方，プローブ物理量として先に登場した $W_t = I \otimes W_t$ に注目する．相互作用後の物理量 $Y_t := j_t(W_t)$ は，次のように微小変化する：

$$dY_t = j_t(L + L^*)dt + dA_t + dA_t^*. \quad (16)$$

(15), (16) 式が，第 1 節の例題の (1), (2) 式に対応する．

さて，重要な局面に到達した．相互作用の構成の仕方から，前節と同様，$j_t(X)$ と Y_t は交換する．しかし，実はより強く，次の性質が成り立つ：

$$[Y_t, Y_s] = 0 \quad (\forall s, t), \quad [j_t(X), Y_s] = 0 \quad (s \leq t).$$

第 1 式より，プローブ物理量たちは全時間にわたって両立し，ゆえに「測定しっぱなし」が実際に許される．さらに第 2 式より，時刻 t までのすべてのプローブ物理量と $j_t(X)$ が両立し，従って $j_t(X)$ は $\mathcal{Y}_t = \{Y_s | 0 \leq s \leq t\}$ に条件付けることができる．つまり，過去の全測定結果に基づく $j_t(X)$ の最適推定値 $\pi_t(X) := \mathbb{E}(j_t(X)|\mathcal{Y}_t)$ が存在する．一方で，$[j_s(X), Y_t] = 0$ $(s \leq t)$ は成立しない．つまり，現在のプローブ物理量 Y_t と過去のシステム物理量 $j_s(X)$ は両立しない．現在から未来を想い描いてもいいが，過去を振り返ってはならないのである．

$\pi_t(X)$ の時間発展方程式は，古典にならって**量子フィルター**と呼ばれ，次式で与えられる：

$$d\pi_t(X) = \pi_t(\mathcal{L}X)dt + \Big[\pi_t(XL + L^*X) - \pi_t(X)\pi_t(L + L^*)\Big]\Big[dy_t - \pi_t(L + L^*)dt\Big] \quad (17)$$

y_t は Y_t の測定値である．現在の推定値 $\pi_t(X)$ を，新たな情報 dy_t に基づいて $\pi_{t+dt}(X) = \pi_t(X) + d\pi_t(X)$ と更新する規則が上式である．第 1 節の (3) 式が同様の構造を持っていることに気付かれると思う．

物理量の変化ではなく，条件付き量子状態の変化を追っても良い．これは，(11) 式，とくに今の場合 (12) 式から導出できる．時刻 t におけるシステムの条件付き量子状態（ρ_s と書いたものである）を ρ_t と表すとき，その更新則は $\rho_{t+dt} \propto M(t, t+dt)\rho_t M(t, t+dt)^*$ で与えられる．ただし，$M(t, t+dt) = \langle w|U(t, t+dt)|0\rangle$

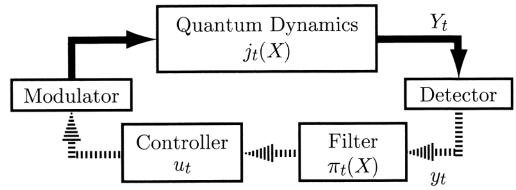


図 3　量子フィードバック制御系のスキーム．実線の矢印は量子確率変数（物理量）の流れを，破線の矢印は古典確率変数の流れを表す．

であり，$|w\rangle$ は dW_t の固有状態である．計算の結果，

$$d\rho_t = \mathcal{L}^*\rho_t dt + \Big[L\rho_t + \rho_t L^* - \mathrm{Tr}((L + L^*)\rho_t)\rho_t\Big] \times \Big[dy_t - \mathrm{Tr}((L + L^*)\rho_t)dt\Big] \quad (18)$$

を得る．ここで，$\mathcal{L}^*\rho := -i[H, \rho] + L\rho L^* - L^*L\rho/2 - \rho L^*L/2$ である．この式は推定値の定義式：$\pi_t(X) = \mathrm{Tr}(X\rho_t)$ により量子フィルター (17) と関係づけられる．統計量の更新則である (17) 式と異なり，(18) 式は全情報 ρ_t の更新則なので，当然，ρ_t で閉じている．

ここで，当然ではあるが，(17), (18) 式はともに古典確率微分方程式である．そして，第 1 節で見たとおり，FB 制御入力 u_t は推定値の関数とするのが合理的であるから，これも古典確率変数である．一方，いま物理量（量子確率変数）$j_t(X)$ を制御したいので，u_t は何らかの形で物理量に変換して，$j_t(X)$ が従う (15) 式に取り込む必要がある．例えば，システムハミルトニアン H の係数が FB 制御できるとすれば，$u_t H$ がそのような物理量となる（H の modulation）．結局，量子 FB 制御の構造は，図 3 で示すように，量子系と古典系がハイブリッドをなすものとなる．

7. 量子フィードバック制御

第 5 節の例題を再考する．相互作用は，$L = \lambda\sigma_z/2 = \sqrt{\gamma}\sigma_z/2$ としたものが対応する．また，$H = u_t\sigma_y/2$ なるハミルトニアンで原子エネルギーを駆動できるとする．これは，図 4 (a) で示す通り，プローブとは別の制御レーザーによって実現できる．u_t は，この制御レーザーの振幅を実時間で調整する FB 制御入力である．制御対象のダイナミクスは，(15) 式の X にパウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を代入したもので与えられる：

$$dj_t(\sigma_x) = -\frac{\gamma}{2}j_t(\sigma_x)dt + u_t j_t(\sigma_z)dt + \sqrt{\gamma}j_t(\sigma_y)dZ_t,$$
$$dj_t(\sigma_y) = -\frac{\gamma}{2}j_t(\sigma_y)dt - \sqrt{\gamma}j_t(\sigma_x)dZ_t,$$
$$dj_t(\sigma_z) = -u_t j_t(\sigma_x)dt. \quad (19)$$

ここで，$Z_t = i(dA_t - dA_t^*)$ とおいた．また，出力方程式 (16) は $dY_t = \sqrt{\gamma} j_t(\sigma_z)dt + dA_t + dA_t^*$ と書かれる．制御を行わない場合 ($u_t = 0$), $dj_t(\sigma_z) = 0$ すなわち $j_t(\sigma_z) = \sigma_z$ となる一方で，出力方程式 Y_t の式には変わらず $j_t(\sigma_z)$ が含まれている．つまり，第5節でも述べたが，注目しているエネルギー物理量 σ_z に反作用を与えずに，この物理量の情報が取得できる．もちろん，本当に原子に何の影響も与えずにこういうことができるわけではなく，(19) 式から分かる通り，共役物理量 σ_x, σ_y に影響が及んでいる．

目的は，エネルギー物理量 $j_t(\sigma_z)$ が励起エネルギー値 $+1$ を確実にとるように原子をFB制御することである．それには，推定値 $\pi_t(\sigma_z)$ を確率1で$+1$に収束させればよい．実際このとき，(9) 式の直前に示した不偏推定の性質から

$$\mathbb{E}[(j_t(\sigma_z) - 1)^2] = 2\mathbb{E}[1 - \pi_t(\sigma_z)] \to 0$$

が成立し，目的が達せられる．従って，システム方程式 (19) はもはや必要なく，問題は推定値のダイナミクス解析に落ちる．この意味で，この問題においては推定値は**十分統計量**となっている．

詳細は省略せざるを得ないが，結果を示そう．まず，推定値 $(x_t, z_t) = (\pi_t(\sigma_x), \pi_t(\sigma_z))$ は次式に従う：

$$dx_t = -\frac{\gamma}{2}x_t dt + u_t z_t dt - \sqrt{\gamma}x_t z_t dw_t,$$

$$dz_t = -u_t x_t dt + \sqrt{\gamma}(1 - z_t^2)dw_t.$$

このように，$j_t(\sigma_x)$ と $j_t(\sigma_z)$ は両立しないため同時測定できないが，同時推定は可能である．ここで，$dw_t = dy_t - \sqrt{\gamma}\pi_t(\sigma_z)$ を定義した．実は，これは何の情報も含んでいない平均0，分散 dt の**ウィーナー過程**である．結果，$x_t^2 + z_t^2 = 1$ が常に成立する（初期値をこの単位円上にセットした：これは初期量子状態が純粋であることを意味する）．制御を行わないとき，推定値 z_t は ± 1 に確率的に収束する（図4(b1) 参照）．つまり，射影測定の時間連続版となっている．ここで，射影測定と異なり ± 1 に向かう「傾向」が時間連続的に捉えられている，というのが要点である．実際，この情報を利用して，推定値 z_t が -1 方向に変化するのを抑えるFB制御がかけられれば，問題は解決しそうである．そのようなFB制御則は，$V_t = \mathbb{E}[(z_t - 1)^2]$ なる量を減少させ続けるようなもの，と言い換えることができる．V_t の時間微分は次式で与えられる：

$$dV_t/dt = \mathbb{E}\Big[(1 - z_t)\{2u_t x_t + \gamma x_t^2(1 + z_t)\}\Big].$$

そこで $u_t = -\gamma x_t$ とすると，$dV/dt = -\gamma\mathbb{E}[x^2(1 - z)^2] \leq 0$ が得られ，これは，$z_0 \neq -1$ であれば V_t が $z_t = 1$ になるまで減り続けることを意味する．実際，このFB制御則を用いると，図4(b2) で示すように z_t は確率1で励起エネルギー値 $+1$ へ収束する．

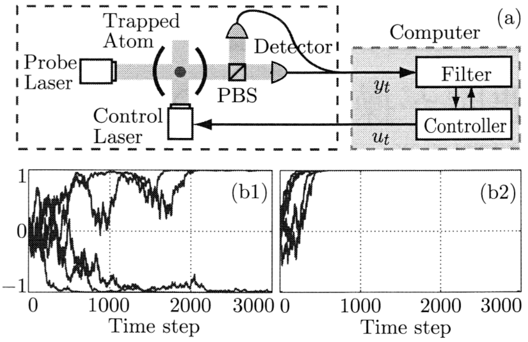


図4　(a) 2準位原子のFB制御の模式図．(b) $\pi_t(\sigma_z)$ のサンプルパス ($\gamma = 2$)．左図は制御を施していないもの，右図は施したものである．

第5節でも以上のFB制御のアイデアは得ていたわけであるが，全時間にわたる推定値 $\pi_t(\sigma_z)$ の振舞いを把握し設計するのは，第4節までの道具立てだけでは少々厳しい．一方で，上で示した通り，量子フィルターの枠組みでは，それは確率微分方程式を解析することで統一的に実行できる．量子フィルターで問題を定式化することの利点は，まさにここにある．

FB制御則は，例えばコスト関数

$$J[u_t] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big((j_t(\sigma_z) - 1)^2 + u_t^2\Big)dt\Big]$$

を最小とする**最適FB制御問題**を解く，というより洗練された方法によって求めてもよい．実際，$J[u_t]$ は推定値の不偏性から $\pi_t(\sigma_z)$ の関数で表すことができ，従って問題は古典量だけが現れる従来の最適制御理論で扱えるようになる．この話題や，多くの量子情報科学への応用については，拙著[1] およびそこでの参考文献を参照されたい．また，本稿では説明抜きに使ってしまった（古典）確率微分方程式の基礎事項を，同雑誌の記事[2] で解説した．適宜利用されたい．

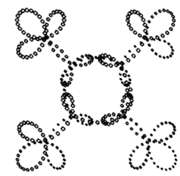
参考文献

1) 山本直樹,「量子力学と確率システム理論」, 計測と制御, **50-11**, 993/999 (2011).
2) 山本直樹,「確率微分方程式の基礎」, 計測と制御, **50-11**, 937/943 (2011).

（やまもと・なおき，慶應義塾大学理工学部）

悪魔が操る情報の物理

情報熱力学への扉



丸山 耕司

1. 悪魔的パラドックス

映画「マトリックス」では，人間が知覚するすべての情報は，実はコンピュータが作り出して脳に送られていたものだ，とする世界が描かれた．実際，我々が見聞きすることのできる物理現象は，すべて脳が信号として処理・認識していることである．ということは究極的にはこの世界も情報が現実で，物質はある種仮想的なものなのではないだろうか．いきなりそこまで飛躍しないにしても，現実的な「物の理（ことわり）」を記述する物理学と，抽象的な概念である情報との間にはどんなつながりがあるのだろうか．近年の量子情報科学の隆盛を筆頭に，物理現象を情報を通して理解する，あるいは情報処理を物理法則の下で論じるといった研究が盛んである．本稿では，そうした流れの源流にある「Maxwell の悪魔のパラドックス」とその解決を中心に，物理と情報の結びつきのほんの一端を紹介したい．

まず，情報の基本的な定量化法を復習しておこう．情報とは，それを知ることに意味や価値のあること，驚きのあること，である．そして，その価値や驚きが大きい（出現確率が低い）ほど，情報の量も大きいと考える．すると，情報量は，その情報が現れる確率の単調減少（連続）関数と見てよさそうだ．さらに，情報量は加法的，つまり，A, B という 2 つの独立な情報がもたらされたときの全情報量は，それぞれの情報量の和であるはずだ．情報量を I で表せば，$I(A,B)=I(A)+I(B)$ となる．一方，確率については，$p(A,B)=p(A)p(B)$ であるので，I の関数形としてふさわしいものとして log があることがすぐに分かる（実際，これが上の要請下の唯一の関数形である）．そこで，確率 p で現れる情報のもつ情報量は，$I=-\log_2 p$ と定義する．対数の底の 2 は，定数係数分の不定性をなくしつつ，最も基本的な二値情報を基準とするためである．

さて，ある確率変数 X を一つずつ独立に生成する情報源 $\mathcal{X}$ を考える．確率変数 X が有限個の $x_i (i\in\{1,2,...,N\})$ からなり，各々の x_i が現れる確率が常に p_i で表されるとき，各 x_i がもつ情報量 $-\log p_i$ の平均

$$H(X) := -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \qquad (1)$$

を，この情報源のもつ（**Shannon**）エントロピーと呼ぶことにする．単位はビットである．これを $H(p_i)$ とか $H(\{p_i\})$ などと表記することもある．ここで，ある j について $p_j=0$ となる場合は，$0\log 0$ が現れるが，これは極限の値を採用してゼロと定義する．二値情報の場合，どちらかの確率が 1 でもう片方が 0 の場合は $H=0$，どちらの現れる確率も 1/2 の場合は $H=1$ となって最大値をとる．エントロピー H が大きいほど，次に現れる情報についての不確定さが大きく，その情報を得たときの価値が高いことになる．

物理の話に戻ろう．情報という言葉が物理の中

で語られる場面は，もちろん他にもある*1)．しかし，Maxwell の悪魔のパラドックス[1]は，その解決に定量的な意味での情報の概念が必要だったという意味で，情報の果たす役割の明確さが際立つ例である．19 世紀半ば，J.C. Maxwell は，もし個々の気体分子の状態を観測できる存在（悪魔）がいれば，温度一定の気体を高温部と低温部に分離することができ，熱力学第 2 法則が破られる可能性を示した．何らかの（人為的）操作が許されるなら，第 2 法則は破られてもよいのだろうか．

この有名なパラドックスを，初めて情報（量）と関連づけて捉えて解決を試みたのは，20 世紀初めの Szilard（“シラード” が近い発音らしい）である．彼は，図 1 のような，分子が一つだけからなる “気体” の入った体積 V の箱を考えた．初め，図で (a) の状態では分子が箱の中のどこをどう運動しているかは分からない．ここで，薄い壁をさっと挿入し，箱の体積を二等分する．観測者（＝悪魔）は，分子の運動状態を変えることなく，分子が壁の右側にあるか左側にあるかだけを測定する（図 1 (b)）．ここでは右側にあったとしよう．観測者は挿入した壁の右側におもりを結びつけ，箱を温度 T の熱浴に接触させ，この一分子気体を体積 V まで等温膨張させる．この膨張過程（図 1 (b) → (c) → (d)）で，気体は熱浴から熱量 Q を受け取り，おもりに対し，

$$W = kT \int_{\frac{V}{2}}^{V} V^{-1} dV = kT \ln 2 \qquad (2)$$

だけの仕事を行う（k は Boltzmann 定数）*2)．等温過程であるから，$W = Q$ である．気体は再び体積 V を占める状態になるわけだから，もとの状態（図 1 (a)）に戻った，つまり熱機関としてサイクルが閉じたことになる．ところが，この熱機関は熱浴から取った熱量 Q を力学的仕事 W に 100%の効率で変換しており，明らかに熱力学第 2 法則を破っている．（熱力学的な）エントロピー収支で見れば，エンジンは完全に元の状態に戻るから変化なし，熱浴は熱 Q をエンジンに与えているので $Q/T = k \ln 2$ だけ下がっている．これが Szilard エンジンによる Maxwell の悪魔の表現である．

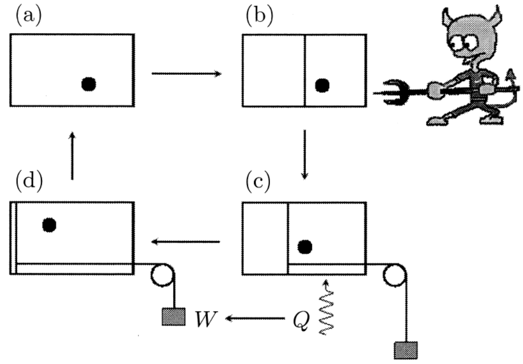


図 1　Szilard が考案した一分子気体エンジンによる思考実験．分子の位置情報を得ることにより，熱力学第 2 法則を破る（ようにみえる）．

第 2 法則が破られないために必要であろう仕事 W の消費理由（エントロピー $k \ln 2$ の増加理由）について，Szilard は図 1 (b) での情報取得（観測）にあると考えた．そして，$k \ln 2$ というエントロピー変化量をこの情報取得に関連した基本的量であるとした[2]．定数係数は別として，これはまさに先に導入した 1 ビットの情報量に対応する量である．その意味づけの正確さはともかく，Shannon による情報理論確立の二十余年も前の，物理の中での情報の役割がはっきりと認識された最初の例である．

悪魔のパラドックスの解決に関しては，この後もしばらくは観測がエントロピーを増やす主犯だと信じられたようだ．その大きな拠り所となったのは，Brillouin が Szilard のアイデアをベースに試みた，観測によって生じるエントロピー変化量の計算である．具体的には，分子運動の観測に光を用いた場合を考え，分子による光の散乱によって生じる系のエントロピー変化を計算し，これがパラドックス中のエントロピー減少を補うのに十分な量であることを示したのだ[3]．ところが，これでもまだ悪魔はしたたかに生きていた．観測に伴うエントロピー増加は原理的にいくらでも小さ

*1)　例えば，エネルギーや量子コヒーレンスの環境中への散逸や，統計力学における粗視化，量子力学における非局所性に関連した超光速通信の議論など．

*2)　分子一つだけの気体に P や T などを含む通常の状態方程式が適用できるのか，という疑問がわくかもしれない．しかし，Szilard エンジンの議論については，これを正当化できる．それを説明するには，残念ながら紙面が足りない….

くできることが，後に示されることになる．

2. Landauer の原理

IBM の Landauer は，「計算」を実行する上での究極のエネルギー効率を研究する中で，情報処理の物理的側面を真っ向から捉えた．キーとなる事実は，すべての情報は何らかの物理的実体を媒体として保持・伝達され，すべての情報処理はそれらに直接（物理的に）働きかけることで実行される，ということである．であれば，すべての情報処理は媒体に物理的に働きかけて状態を変化させる，物理的な過程に対応しているはずである．

今，ある情報処理を，入力 x に対して $y = f(x)$ を出力する写像 f として表そう．この写像 f が単射である場合，つまり入力 x と出力 y が 1 対 1 に対応する場合（例えば，NOT ゲート=ビット反転処理）は，逆写像 f^{-1} によって出力 y から元の入力 $x = f^{-1}(y)$ を一意に得ることができる．言い換えれば，ある情報処理が単射写像であるときは，その処理は “可逆” である．上で述べた対応関係を考えると，可逆な情報処理は可逆な物理的過程で実行可能であることになり，原理的にはエントロピー増加，散逸のない過程で遂行可能となる．

では，入力と出力が 1 対 1 に対応しない情報処理を考えよう．2 ビットの入力から 1 ビットの出力を得る処理（AND や OR など）はすべてこれに相当するが，1 ビット処理でも，0 か 1 かに関わらず出力を 0 にしてしまうような処理は 2 対 1 の対応であり，単射ではない．これを情報の消去と呼ぶ．情報処理を担う物理系（レジスター，あるいはメモリー）について考えると，消去によって許される自由度が減り，エントロピーが減少，その結果，自由エネルギーが増大する．これは，正のエネルギーの消費が必要であること，その分は環境に散逸してしまうことを意味する．1 ビットの情報消去の場合は，エネルギー散逸量は $kT \ln 2$（エントロピー $k \ln 2$）となる．Landauer はこれを一般化し，不可逆な情報処理はすべて物理的には散逸を伴うと主張した（**Landauer の消去原理**[4)]）．逆に，可逆な処理だけで全体の情報処理を構成することができれば，（理想的には）散逸ゼロで計算が実行できる．図 2 に一分子気体でメモリーをモデル化したときの具体的な消去プロセスの例を示す．“0” と “1” を分ける壁を引き抜いたときに気体のエントロピーが増大し（非可逆過程），これが標準状態 “0” への等温圧縮の際に熱浴へと散逸する．

Landauer の原理に対しては反論も根強くある．例えば，情報を消去するのに，メモリーがすでに標準状態（例えば図 2 の “0”）にあることが分かっていればそのまま何もせず，“1” の状態にあれば該当する体積 $V/2$ をゆっくり左側（“0” 側）へスライドさせればいいではないか，というものなどだ[5)]．体積一定の領域をスライドさせるのに仕事は必要ないからだ．しかし，この方法だとメモリー状態の観測結果に依存した操作の履歴が外部に残ってしまう．正味の結果として，情報が消去されたことにならないのだ．したがって，メモリー状態によらず，図 2 のように，常に同じ手順で標準状態 “0” へ戻さなければならない．また，図 2 のような消去過程は，逆にたどることで元のエントロピーをもつ状態に戻すことができる，したがっ

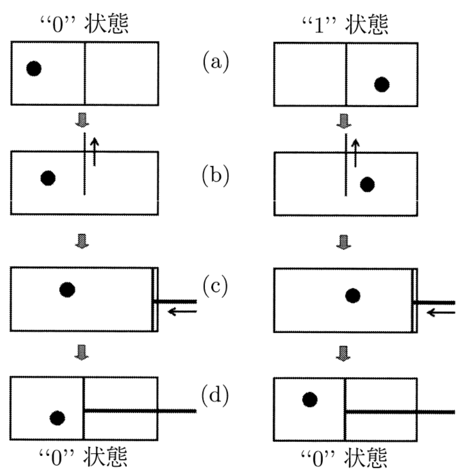


図 2　情報消去の熱力学的過程．一分子気体でメモリーをモデル化し，分子の位置（左 “0” か右 “1” か）で記録された二値情報を消去するには，まず中央の壁を取り払い，右側から気体を等温圧縮して体積を半分にし，標準状態 “0” にする．

て非可逆な情報処理が可逆な物理過程で実現されたことになる，という批判もある[6]．だが，物理系が保持していた元の情報は復元できないので，情報処理という文脈でこれを可逆な物理過程と呼ぶのは無理がある．

さて，同じくIBMのBennettはLandauerの考察からもう一歩踏み込んで，観測による情報取得は原理的には可逆な物理過程で実現可能であることを示した[7]．これにより，Szilardエンジンで記述したMaxwellの悪魔のパラドックスにおいて，本質的に散逸を伴うのは悪魔による観測行為ではなく，悪魔の頭の中の記憶を消去する過程であることが確定することになる．サイクルを閉じて初期状態に戻さなければならないものの中には，物理的実体である悪魔の頭（メモリー）も含まれるからだ．そして，消去に必要なエネルギー消費がエンジンから得られるエネルギーを相殺するので，パラドックスは解決する．

ところで，ここに述べた論理展開だけだと，単射でない情報処理に物理的散逸が伴う理由は熱力学第2法則そのものであり，その帰結として第2法則が破られないのは当然である．しかし，1ビットの情報消去には少なくとも $k\ln 2$ のエントロピー増加が必要であること自体は，第2法則を用いなくても導くことができる．興味ある読者は文献8)やレビュー論文[9]等を参照されたい．また，同様に $H(p)(<1)$ ビットの消去に必要なエントロピー増加は $k\ln 2H(p)$ となるが，これらは0と1のための体積が等しい（各状態の自由エネルギーが等しい）メモリー構成を前提としている．この前提により，可逆な情報処理についてはエントロピー・エネルギー変化を考慮する必要がなく，情報論的および熱力学的エントロピーの対応関係を議論するのに見通しがよくなる[10]．そもそも，熱力学におけるエントロピーは仕事などのマクロな量の観測によって定義されており[11]，確率分布を通した情報論的エントロピーとは直接の関係は明らかでない．Landauerの原理はその橋渡しの役を担っていると言える．

3. 量子系に記録された情報

今度は量子系を（古典）情報の記録・処理媒体として考えよう．量子系に情報を記録する（エンコードする）とは，情報（アルファベット）$\{i_1, i_2, ..., i_N\}$ を，量子状態 $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N\}$ にそれぞれ対応させることである．各 ρ_n は量子状態を記述する密度演算子である．各々の情報 i_n が現れる確率を p_n とし，量子状態 ρ_n が確率 p_n で現れる系を，$\{p_n, \rho_n\}$ と表記しよう．情報の受け手にとっては，観測する前には受け取った量子状態がどの情報に対応するか分からないから，どれも ρ_n を“平均”した量子状態

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i \rho_i \tag{3}$$

にあると考えることができる．

状態 $\{p_n, \rho_n\}$ に載せられた情報を消去するのには，どれだけのエントロピー増加が必要であろうか．分子の位置で情報を記録した場合と異なり，この場合は壁を抜いて自然に非可逆な過程を起こさせるようなことができない上，等温圧縮のような熱力学的過程をそのまま考えることも無理がある．そこで，ρ_i を，ある温度 T の熱浴との接触により，熱平衡状態 $\omega = e^{-\beta H}/Z$ にしてしまうときの全系のエントロピー変化を計算する．H は熱浴とメモリーの各構成粒子を記述するハミルトニアン，$\beta = (kT)^{-1}$, Z は分配関数である．まず結果だけを示すと，エントロピー変化は，次式

$$S(\rho) := -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho) \tag{4}$$

で定義された**von Neumannエントロピー**を用いて

$$k\ln 2\left(S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i)\right) \tag{5}$$

と表される．式(5)を $k\ln 2$ の後のカッコ内の量はしばしば $\chi(\rho)$ と表記される．各 ρ_i が互いに直交，つまり $i \neq j$ に対して $\mathrm{Tr}[\rho_i \rho_j] = 0$ となるときは，$\chi(\rho) = H(p_i)$ となる*3)．互いに直交す

*3) 証明は，例えば，文献12)中のTheorem 11.8.

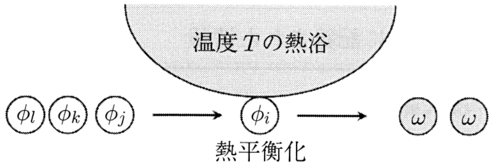


図 3 熱浴との相互作用による情報の消去.

る ρ_i はすべて確率 1 で区別可能であるから，これは上述の古典的な状況に対応し，消去によるエントロピー増加は Shannon エントロピー $H(p_i)$ に $k\ln 2$ をかけたものになる．

量子状態 $\{p_i, \rho_i\}$ にエンコードされた情報を消去する方が，同じ確率分布を持つ古典的状態にエンコードされた情報を消去するよりも，エントロピー増加が小さい．つまり，ρ には $H(p_i)$ ビットよりも小さい情報量しか持たせられない．これは，異なる i と j に対して ρ_i と ρ_j が直交しない場合，それらを観測によって完全には区別できないという重要な事実に由来する．区別できない → 観測しても得られる情報が少ない → エントロピーが小さい，となるわけである．

では，Lubkin の流儀[13]にしたがって式 (5) を導いてみよう．上述したように，量子 '気体' を操る代わりに，温度 T の十分に大きい熱浴と情報を保持したメモリー系を相互作用させ，メモリーの状態を熱浴の状態と同じにしてしまうことで情報を消去する（図 3）．このままでは最終的なメモリー状態が混合状態 ω となり，Landauer 流に消去を定義したときのような，きれいにリセットされた（純粋）状態にならない．しかし，温度 T を十分に低くすれば，$\omega = e^{-E_0/kT}|0\rangle\langle 0| + e^{-E_1/kT}|1\rangle\langle 1| + \ldots$ のうちの最もエネルギーの低い基底状態 $|0\rangle\langle 0|$ の項が他と比べて圧倒的に大きくなり，純粋状態とみなせる．

全系のエントロピー変化は，メモリーと熱浴のエントロピー変化の和 $\Delta S_{\mathrm{total}} = \Delta S_{\mathrm{memory}} + \Delta S_{\mathrm{bath}}$ である．メモリーのエントロピーは，初めの状態が ρ_i とすれば，

$$\Delta S^{(i)}_{\mathrm{memory}} = k\ln 2(S(\omega) - S(\rho_i)) \qquad (6)$$

だけ変化する．熱浴のエントロピー変化は，熱浴とメモリーとの間でやりとりするエネルギーを温度で割ればよい：

$$\begin{aligned}\Delta S_{\mathrm{bath}} &= \frac{\Delta Q_{\mathrm{bath}}}{T} = -\frac{\Delta Q_{\mathrm{memory}}}{T} \\ &= -\frac{\mathrm{Tr}(\omega H) - \mathrm{Tr}(\rho H)}{T} \\ &= k\mathrm{Tr}[(\omega - \rho)\ln(Z\omega)] \\ &= -k\ln 2[S(\omega) + \mathrm{Tr}(\rho\log_2\omega)]. \quad (7)\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目への変形では，$H = -kT\ln(Z\omega)$ を使った．式 (6) と式 (7) より，（von Neumann エントロピーと熱力学的エントロピーの間の変換係数 $k\ln 2$ は 1 として）

$$\begin{aligned}\Delta S_{\mathrm{total}} &= \sum_i p_i \Delta S^{(i)}_{\mathrm{memory}} + \Delta S_{\mathrm{bath}} \\ &= -\sum_i p_i S(\rho_i) - \mathrm{Tr}[\rho\log_2\omega] \\ &\geq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i). \qquad (8)\end{aligned}$$

最後の不等号は（量子）相対エントロピーの非負性 $S(\rho||\omega) = -S(\rho) - \mathrm{Tr}[\rho\log_2\omega] \geq 0$ による．

ところで，von Neumann エントロピーの表式 (4) は，Shannon による情報理論的エントロピーの式 (1) によく似ているが，(4) の定義の動機は熱力学であって，情報理論ではない．von Neumann は，直交する量子状態をもつ気体分子を異なる種類の分子とみなしたときの，混合気体のもつエントロピーが熱力学的エントロピーと等しくなるように量子系のエントロピー (4) を定義した．Shannon に式 (1) を「エントロピー」と呼ぶよう提案したのは von Neumann だったそうである．

4. 量子データ圧縮と Holevo 限界

pN 個の 0 と $(1-p)N$ 個の 1 からなる長さ N のビット列は，N が十分大きいとき，長さ $NH(p)$ の短いビット列へと情報を失うことなく圧縮することができる．データ圧縮に関する Shannon の符号化定理をかなり大雑把に言うとこうなる*4)．これに対応する（無雑音）量子符号化定理も存在す

*4) 詳細は標準的な教科書[14]を参照.

る[15]：Hilbert 空間 H 上の量子状態 ρ を生成する i.i.d. 量子情報源（i.i.d.=independent and identically distributed, 独立同分布）があるとする．圧縮率 R が $R > S(\rho)$ を満たすときは，復元可能な量子データ圧縮が可能である．

例えば，Hilbert 空間 $H^{\otimes N}$ 上の状態 $\rho^{\otimes N}$ が与えられたとすると，圧縮とは 2^{NR} 次元の空間上の状態へ可逆に変換することである．$\rho^{\otimes N}$ を NR 個の量子ビット（qubit）の状態へ変換することと言ってもいい．そして，この R の下限が von Neumann エントロピー $S(\rho)$ で与えられることになる．

さて，この量子符号化定理を，Landauer の消去原理の視点で見てみよう．状態 ρ の列を得るということは，$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ となるような $|\psi_i\rangle$ が確率 p_i で現れる状態の集合があることとみなせる．純粋状態のエントロピーはゼロなので，この状態に記録された情報を消去するのに必要なエントロピー増加は，上の議論から $k \ln 2 S(\rho)$ である．そこで，量子状態 $\rho^{\otimes N}$ を圧縮して，$N(S(\rho)-\epsilon)$ 個の量子ビット（$\epsilon > 0$）に変換できたとしよう．圧縮（符号化）の結果できる文字列（量子ビット列）はどれも等しい確率で現れるはずだから（でなければ，さらなる圧縮が可能である），ρ を変換した結果の各量子ビットは，互いに直交する二状態，$|0\rangle$ と $|1\rangle$，が等しい確率 1/2 で現れる混合状態 $\omega = 1/2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ になっている．

状態 ω にある $N(S(\rho)-\epsilon)$ 個の量子ビットが保持する情報を消去するのに必要なエントロピー増加は，$Nk \ln 2(S(\rho)-\epsilon)$ となり，$Nk \ln 2S(\rho)$ より小さい．ところが，Landauer の消去原理により，状態 $\rho^{\otimes N}$ 中の情報を消去するには少なくとも $Nk \ln 2S(\rho)$ だけのエントロピー増加が必要なはずである．我々は可逆な圧縮を考えており，圧縮の前後で系が保持する情報量に変化はないから，これは矛盾だ．したがって，量子データ圧縮が最も効率よく実現できるときの圧縮率は von Neumann エントロピーで与えられることが，消去原理からも分かる．

次に少し違うシナリオを考えてみる．量子状態 ρ_i が確率 p_i で現れる系，$\{p_i, \rho_i\}$，にはどれだけの（古典）情報量を保持させることができるだろうか．この上限は，Holevo 限界とよばれる重要な量である．アルファベット $\{i\}$ を量子状態 $\{\rho_i\}$ でエンコードしたとき，最適な観測（復号化）によって得られる情報量と言ってもよい．

これは前節で扱った設定と全く同じであるので，受け取った量子状態 $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ 中の情報を消去するのに必要なエントロピー増加は $\chi(\rho) = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i)$ である．逆に見れば，状態 ρ には最大で $\chi(\rho)$ だけの情報量を持たせることができる，とも解釈できる．

実際，$\{\rho_i\}$ を生成する送信者 A とそれを受け取って観測する受信者 B 間で共有できる情報量 $I(A:B)$ の上限は $\chi(\rho)$ で与えられ，任意の（POVM）観測を認める条件下で Holevo によって厳密に証明された[16]．ここで述べたものはあくまで Holevo 限界の簡易な正当化であり，厳密な意味での導出ではない．とは言え，情報消去の視点からも同じ形の χ が正当化されるのは興味深い．

5. まとめ

Maxwell の悪魔のパラドックスは，情報と物理が密接に関係していることを示してくれた．Landauer の原理，情報消去過程を通して，情報論的エントロピーと熱力学エントロピーの同一視が正当化される．その結果，様々な物理現象を情報の視点から眺めたり，また逆のこともできるようになる．本稿ではその一端を紹介した．

情報消去に必要な仕事量 $kT \ln 2$ の実験的検証は，この値の小ささもあり，未だなされていない．しかし，近年 Szilard エンジンの実験は可能になり，ニュースにもなった．微小な系の kT オーダーの熱ゆらぎを直接観測，その情報を自由エネルギーに変換してみせたのだ[17,18]．近い将来，簡単な情報処理の可逆性・不可逆性が物理量として観測されることになるかもしれない．

さらに，統計力学の中での情報（情報論的な意味での）位置づけも曖昧さが残る．最大エントロピー

原理[19]により，情報エントロピーからBoltzmann分布を求めることは可能なものの，情報理論的および物理的エントロピーの普遍的な関連ははっきりしない．

量子情報理論や量子力学基礎論での情報の根源的役割も，その研究は緒についたばかりだ．今後，情報と物理の織り成す鮮やかな世界がますます明らかになっていくことだろう．悪魔はまだどこかで笑っているかもしれないのだ．

参考文献

1) H.S. Leff and A.F. Rex, *Maxwell's Demon 2* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003).
2) L. Szilard, *Z. Phys.* **53**, 840 (1929). 文献1)に英訳が収録されている．
3) L. Brillouin, *J. Appl. Phys.* **22**, 334 (1951). 文献1)に収録．
4) R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183 (1961). 文献1)に収録．
5) J.D. Norton, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 375 (2005).
6) O.J.E. Maroney, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 355 (2005).
7) C.H. Bennett, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 905 (1982); *IBM J. Res. Dev.* **32**, 16 (1988). 共に文献1)に収録．
8) K. Shizume, *Phys. Rev. E* **52**, 3495 (1995); B. Piechocinska, *Phys. Rev. A* **61**, 062314 (2000).
9) K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1 (2009).
10) A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, *Phys. Rev. E* **84**, 061117 (2011).
11) 田崎晴明,『熱力学—現代的な視点から』, 培風館(2000).
12) M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
13) E. Lubkin, *Int. J. Theor. Phys.* **26**, 523 (1987).
14) T.M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
15) B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
16) 量子相対エントロピーの強加法性を用いたスマートな証明が，文献12)のTheorem 12.1に解説されている．元の文献は，H.P. Yuen and M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 363 (1993)である．
17) S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, and M. Sano, *Nature Phys.* **6**, 988 (2010).
18) 田崎晴明，日本物理学会誌，**66**，172 (2011).
19) E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957).

（まるやま・こうじ，大阪市立大学大学院理学研究科）

真空に隠れる情報と量子エネルギーテレポーテーション

量子情報物理学における存在と無



堀田 昌寛

1. はじめに

情報の送受信によって遠隔地の真空からエネルギーを取り出せる**量子エネルギーテレポーテーション**[1]（Quantum Energy Teleportation，略して**QET**）の提案以降，興味を持ってくれる海外の一般の方から哲学的な質問も受けるようになった．量子テレポーテーションによってある人物をSFのように遠隔地に転送したとき，到着した人物は本当に送られた人物と同一人物と言えるのだろうかという趣旨である．また本当に物体の移動になっているのかという質問もある．いろいろやり取りして納得してもらったと思っているが，きっと日本でも同様の興味を持っている方がいるのではないかと思われる．この素朴な問いは，**量子情報科学**や，それと量子物理学の本質的融合から生まれた新しい研究分野である**量子情報物理学**の深奥にも関わっている．最近のQET研究から明らかになった**エネルギーの大域的操作可能性**とそのブラックホール物理学への応用の紹介とともに，この機会を借りてこの質問も簡便ながらPenrose[2]的に論じていきたいと思う．

2. 科学における存在と無～情報数学と物理学の交錯～

物理学は普遍的な世界観，宇宙観を実験，観測に基づいて構築する学問である．我々の世界を満たす物質の正体や法則を探求し，それを通じて「存在とは何か.」という哲学的な問いに対してさえも，その答えを科学的に見つけようとするものである．

ある物の存在やその属性を問う議論には，その情報を認識する測定者の存在が必ず仮定されている．唯物論的視点から見ると，それさえも各器官から入る様々な信号に応じて測定者の脳が計算機として活動しているに過ぎないとも言える．しかしそれを反転して捉えた唯心論的視点では，世の中や宇宙はその存在を感覚として再現できる情報の集まりに過ぎないという極論もあり得る．この立場では，物理法則は情報量とその情報の質を扱う何らかの数学理論の中から出てくる2次的な派生物に過ぎないことになる．存在しているのは物を考えている自分の意識と持っている情報しかないという特異な世界観である．但し意識をもった人間は多数いるため，各自の経験を整合させる何らかの非局所的な情報数学的ルール（プログラム）は存在することになるが．この2つの視点は，互いを排除しない可能性もある．真実の世界に対する双対表現（異なる2つの言語）に過ぎず，互いに翻訳し合える状況もあり得るのだ．例えば，ブラックホールの命名でも有名なWheelerは，物理学は情報理論から導出されるべきものという主張をしている[3]．彼の有名なフレーズである“It from bit.”は，すべての実在(It)が情報の象徴であるビット(Bit)から生まれることを指す．一方，情報数学者であるLandauerは，有限温度の環境における

計算過程には情報処理量に応じて必ず熱的エントロピーの増加が伴うと主張して，“Information is physical.”（情報は物理的だ.）と強調した[4]．最近でもホログラフィック原理の研究において進展があり[5]，物理学と情報理論の相互の関係性は多くの研究者に興味を持たれている．

測定者の存在が際立つのは量子力学の世界である．よく知られているように量子力学では物理的対象の実在像は測定方法に依存する．電子や光もあるときは粒子と振る舞い，あるときは波として振る舞う．また場の量子論では，慣性系の測定者にとって何もない無の状態として定義される真空でも，一様加速度運動をする測定者は加速度に比例した温度の熱浴の存在を観測してしまうUnruh効果[6]も知られている．科学では，存在や無の定義すらも測定者に依存するのである．

3. 物体の個性と量子テレポーテーション

物体は原子核を作っている陽子や中性子とそれを取り巻く電子などの素粒子によってできている．またその素粒子も，対応する量子場の局在励起であることが知られている．アナロジーとしてテレビの液晶画面を思い出すと，画面全体が量子場に例えられ，また特定の時刻にその中の１素子分だけスイッチが入り，その位置が画面上を隣へ隣へと切り替えられていくときの様が，素粒子の運動の例えとなる．同時に2つの素子が点滅すれば，2つの素粒子が存在している比喩にもなる．同じ素子なのでこの例では2つの素子の励起に全く差がない．実は物理的な素粒子でも同じ種類ならば個体差が全くないことが知られている．例えば2個の電子があっても，その2つは全く同じ質量やスピン，電荷を持っており，個性の差を示すいかなる属性も原理的に持たない．例えこっそりその2つを交換しても，その差には誰も気付けないのだ．どの素粒子も宇宙の隅々まで充満しているシンプルな共通素材としての量子場の“しわ”に過ぎない．素粒子自体は個性がない統一規格の素材なのに，我々の周りには素粒子から作られる個性豊かな物の存在に溢れている．これらの個性は一体どこから派生したのであろうか．それは素粒子集団の運動の違いであり，その情報が集約された量子状態の差と言える．量子状態が物体の個性そのものなのだ．しかもこの量子状態に含まれる量子情報は，ビット列で記述できる古典的な情報と異なり，量子力学のユニタリー性のため正確なコピーを作ることができない．これは**複製不可能定理**[7]としてよく知られている．Penrose[2]も強調したように，この意味で究極のアイデンティティと呼べるのが量子情報であり，量子状態なのである．量子状態のこの性質を使って現在では量子暗号という最強の認証セキュリティシステムも提案されている．これらのことを踏まえて量子情報科学の立場では，様々な個性を持った物体そのものを，その量子状態と同一視する．

Bennettたちによって導入された**量子テレポーテーション**（Quantum Teleportation，略して**QT**）はこの量子状態を古典的通信だけで遠隔地に転送する技術である[8]．離れた地点にそれぞれアリスとボブがいる．アリスは電子（名称を1）を持っており，そのスピンはボブに転送したい量子状態 $|\Psi\rangle$ にある．それ以外に二人はそれぞれ電子を一つずつ持っており（名称を2，3とする），その2つの電子のスピンは，あるBell状態になっている．ここでBell状態とは，スピン1重項状態のような最大量子もつれ状態で，互いに直交する4種類が存在する．スピン1重項状態以外の3つのBell状態は，1重項状態の2つのスピンの片方にパウリ行列の3つの成分を各々かけることで得られる．この4つのBell状態は，2スピン状態空間の完全系をなす．状態転送するため，まずアリスは手元の電子1と2のスピンがどのBell状態にあるかを測定して確かめ，その結果をボブに電話で伝える．ボブはその結果に応じて選んだある操作を自分の手元にある電子3に施す．すると操作後の電子3の量子状態は，ちょうどアリスが持っていた $|\Psi\rangle$ になる．先ほど述べたように電子1と電子3は全く区別のない統一規格の素材である．それに $|\Psi\rangle$ の情報が書き込まれて初めて，量子的な

モノとしての個性を持つ．また転送後にアリスの手元に残った電子 1，2 には $|\Psi\rangle$ の情報がまるで残っていないことも確かめられる．コピー不可能な個性である量子状態 $|\Psi\rangle$ が確かに離れた地点に転送されたため，量子情報科学の立場では，特定の "物体" そのものが，量子的細部まで含めて正確に転送されたと主張できる．これが先の質問に対する大まかな答となる．マクロな存在である人間も複雑な量子状態にある多数の素粒子の集まりなので，もし QT が人間にも可能になれば，転送先に現れるのは，細かな記憶や感覚も含めて，間違いなく本人であると言えるだろう．ここで，人体の詳細な設計図を検査で用意して行う人間のスクラップ–アンド–ビルドでの複製作成でも同じことが可能であると，誤解される方がいるかもしれない．だがその場合，どう測定してもオリジナルの波動関数が崩壊（収縮）するために，量子性に絡んだ情報は正確に全部を設計図に起こせないことが分かる．その差を無視して作られる複製がどの程度本人と言えるかは，未知数である．ところで，QT で本当に物体が移動したのかという問いはどうだろう．「量子情報科学の立場での "物体" の定義は，それはそれで結構．しかし物体は一般に質量やエネルギーを持っている．これらそのものは移動しないのでは？」という批判もあり得るだろう．実際 QT の転送先には，十分な数の素粒子と，転送される量子状態が持つべき励起エネルギーの供給源が必要である．従って例えば素粒子もエネルギーも何もない真空領域に，QT で量子状態を転送することはできない．ただ十分なエネルギーさえあれば原理的に量子場をそれで励起して素粒子は生成できるため，概念的にはエネルギーを真空領域にテレポートできるかという問題に還元できる．この問題に肯定的に答えるのが，量子情報物理学における量子エネルギーテレポーテーションである．

4. 量子エネルギーテレポーテーション

話を具体的にするために，以降では空間 1 次元中の質量零のボソン場を例として考えてみよう．空間の座標は変数 x で表記する．物理学における無を意味する真空は，量子場の最低エネルギー固有状態 $|0\rangle$ として定義される．粒子が一つもない状態だが，実は空間の各点の場は揺らいでいる．各点の場には調和振動子と同様に不確定性関係に起因する零点振動があるためである．$|0\rangle$ は，無限個の揺らぎパターンの状態の量子的重ね合わせによって，数学的に表現される．図 1 ではこの状況を簡便化して，ある微小な空間領域で粗視化した場の揺らぎを，点線と実線の 2 つの揺らぎのパターンだけで表示した．この揺らぎの零点エネルギーも存在するのだが，通常はその零点エネルギーを差し引いて，真空状態のエネルギー固有値は零と定めている．また真空における場のエネルギー密度の期待値も零である．しかし様々な量子場が持っている零点エネルギーは物理的に消えたわけではなく，数式の表記ルールに隠されているだけである．実際 2 枚の平行な鏡を真空状態に持ち込むと，電磁場の零点エネルギーの存在のために Casimir 効果が起こり，その 2 枚の間に引力が生じることも知られている．一般に量子場の真空は，測定を含む任意の局所的操作によって必ず励起されてしまう **passivity**[9] と呼ばれる性質を持っている．そのため操作後の状態におけるエネルギーの期待値は必ず増えて，正の値をとる．図 2 に，零点振動が局所的操作で励起された場合の例を与えた．ある揺らぎ成分（図では実線）を抑制することができても，必ず他の揺らぎ成分（図では点線）が必ず

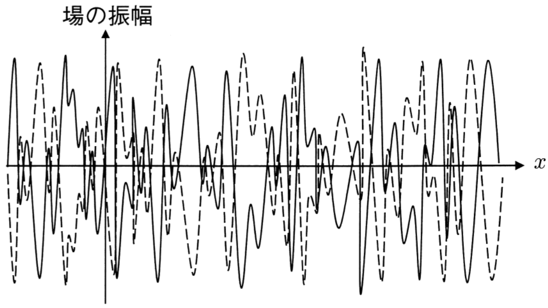


図 1 真空状態 $|0\rangle$ における量子場の零点揺らぎの概念図．

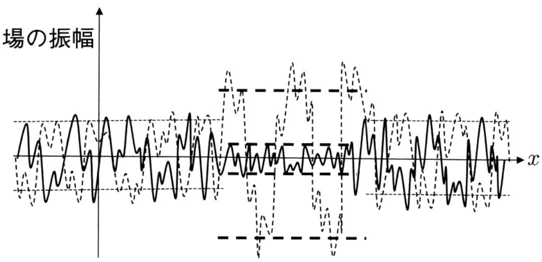


図 2　真空状態に局所的操作を行った後の量子揺らぎの例.

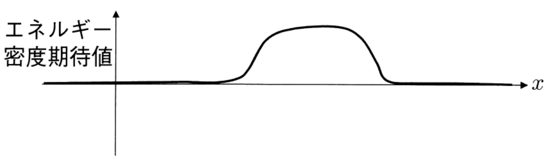


図 3　真空状態に局所的操作を行った後のエネルギー密度期待値.

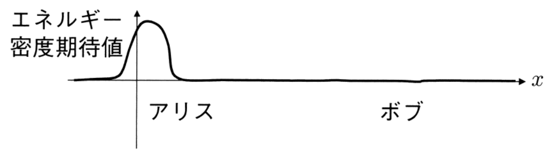


図 4　アリスが局所的測定を行った後のエネルギー密度期待値.

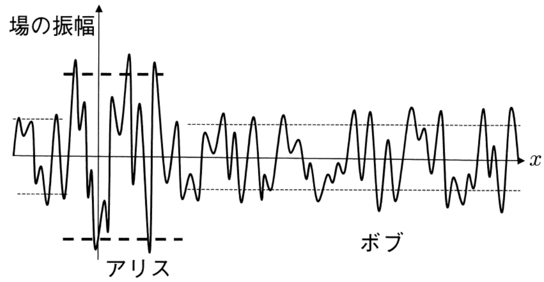


図 5　アリスの測定で観測された量子揺らぎの例.

増幅されて，図 3 のように，結局平均エネルギーを押し上げる．つまり局所的操作は量子場へエネルギーを注入してしまう．どんな局所的操作でも，真空状態が持つ零点エネルギーを非零の平均値で外部に取り出すことはできないのだ．真空は零点エネルギーを確かに隠し持っているのだけど，普通のやり方では利用できないことを意味する．しかし QET では，局所的操作に加えて，離れた地点間の情報通信という非局所的操作を加えることにより，真空からエネルギーを取り出すことができる．ポイントの 1 つは，場の零点振動の局所的測定である．何もない無の状態の真空でも，既に述べたように多様な揺らぎ状態の線形重ね合わせであり，測定をすると隠れていた零点振動に関する大量の情報の一部が露わになるのだ．この情報の多寡が，QET におけるエネルギーの転送量の大小に繋がることも知られている[10,11]．エネルギーを取り出したい地点にボブがおり，そこから離れた地点にアリスがいる設定を考えよう．アリスが自分の場所で場の零点振動を測定すると，passivity のために，アリスの測定機を通じて必ず真空にエネルギーが注入される（図 4）．測定エネルギーの代償として，揺らぎに関する情報をアリスは手にいれることができる．同時に，この測定によって所謂波動関数の収縮が起きる．例えば図 5 のように実線成分が観測されれば，実現されなかった点線の成分は瞬間に消える．ここでポイントは，真空状態が持つ量子もつれのために，空間各点での揺らぎの間に相関があることだ．そのためアリスの測定結果には離れたボブ周辺の量子揺らぎの情報も含まれている．図 5 の例では，ボブ周辺でも，点線の揺らぎ成分が消滅し，実線成分の揺らぎのみが存在していることが分かる（但し実際には相関が完全でないため，ボブ周辺の揺らぎの情報の一部しかアリスの測定結果に含まれず，波動関数の収縮は不完全になる）．ボブの周辺の真空揺らぎ（図 1）は，平均エネルギー密度を零に保ったまま，アリスの遠隔測定によって，その内容が大きく様変わりするのだ．このため，ボブは実線成分だけを抑制する局所的操作を選び，それを実行することが可能となる．もともとの真空状態 $|0\rangle$ に行うとその操作は点線成分を増幅してエネルギーを増やすはずだったが，アリスの操作後の状態ではその成分は消えているため障害とならない．この操作をすると量子揺らぎは図 6 のようにボブ周辺で抑制される．もしアリスの測定で点線成分が観測されたならば，その成分だけ抑制する操作をボブは行えば良い．結果として，揺らぎが抑制さ

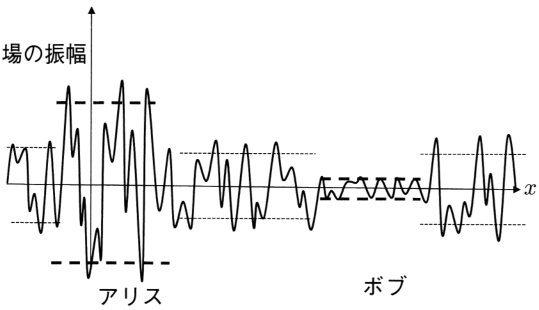


図 6　アリスの測定結果に依存した局所的操作をボブが行った後の量子揺らぎ．



図 7　ボブの操作後のエネルギー密度期待値．

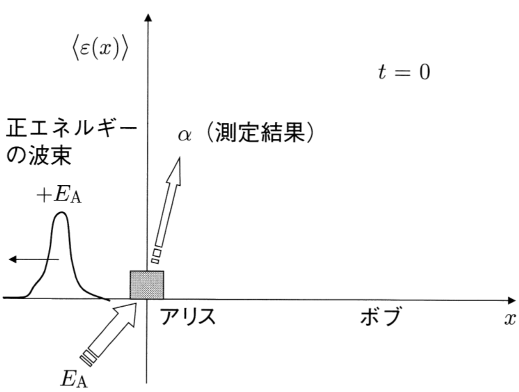


図 8　QET プロトコル第 1 ステップ：アリスが真空にエネルギーを注入しながら局所的測定を行い，揺らぎに関する測定結果を得る．場には正エネルギーの波束が生成される．

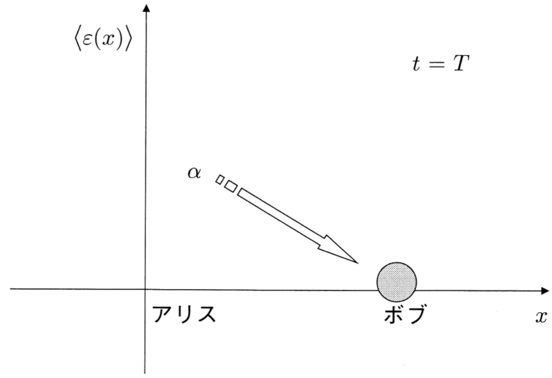


図 9　QET プロトコル第 2 ステップ：アリスの測定結果を古典通信でボブに伝える．

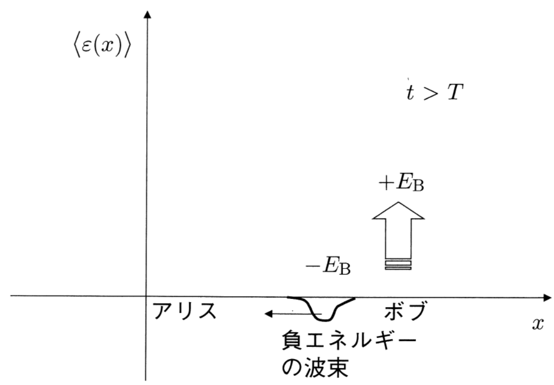


図 10　QET プロトコル第 3 ステップ：測定結果に依存した局所的操作をボブが行う．その結果，負エネルギーの波束を生成しながら正のエネルギーが外部に取り出される．

れて余った零点エネルギーが正の平均量で外部に放出され，それと釣り合うようにボブ周辺に負エネルギー密度の領域が現れる（図 7）．ここで重要なのは，ボブがこのような局所的操作を選ぶためにアリスから測定結果を教えてもらう必要があることだ．これには測定結果の送受信が必要であるが，この伝搬速度は光速度を超えない．このため QET も因果律を破らないことが保証されている．これまでの話ではこの情報通信にかかる間の系の時間発展を無視してきたが，これを採り入れたある QET プロトコル[12)]では図 8 から図 10 のような状況となることが示せる．縦軸は，エネルギー密度の期待値 $\langle \varepsilon(x) \rangle$ を表す．図 8 は時刻 $t=0$ においてアリスが自分の領域の量子揺らぎを測定した状況を表している．測定によってエネルギー E_{A} を注入された量子場には E_{A} のエネルギーを持つ波束が生じる．うまく測定を選ぶと左向き進行波だけが励起されることも分かる[12)]．E_{A} の代償として，揺らぎの情報 α をアリスは得る．α にはボブ周辺の揺らぎの情報も含まれる．図 9 のようにこの結果を光速度でボブに伝え，ボブは α に依存したある局所的ユニタリ変換を時刻 $t=T$ に量子場に対して行う．すると図 10 のように真空揺らぎから平均エネルギー $+E_{\mathrm{B}}$ が外部に取り出

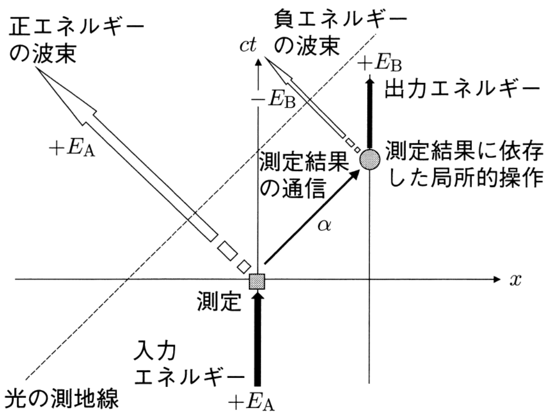


図 11　QET プロトコルの時空図.

され，量子場には $-E_B$ の負の平均エネルギーを持つ波束が励起される．その負エネルギー波束は，アリスが測定で励起した正エネルギー波束の後を追いかける．この QET プロトコルを時空図上にまとめたのが図 11 である（c は光速度）．この図は，空間を伝搬してきた情報 α が $+E_B$ と $-E_B$ のエネルギーを対生成するファインマン図のようにも読み取れ，量子情報物理学の本質を端的に示している．一般に量子場のエネルギーの非負性から，ボブが量子場の零点振動から取り出せるエネルギー E_B は，アリスが α を得るための測定で消費したエネルギー E_A を超えないことも保証されている．また測定結果 α を知る別な人物チャーリーがボブと異なる地点にいれば，彼はそこの零点揺らぎからもエネルギーを取り出せる．取り出せるエネルギー量はアリスから離れるほど小さくなる．そしてアリス周辺を除くあらゆる領域から取り出せるエネルギー総量が E_A を超えないことも分かる．

5. エネルギーの大域操作性とブラックホールのエントロピー問題

QET プロトコルは，エネルギーの大局的操作性という，従来知られていなかった属性を露わにしている．場の量子論におけるエネルギーはその密度演算子の空間積分で記述される．この密度演算子そのものは局所的概念である．だが量子状態が非局所的概念であるために，量子情報物理学におけるエネルギーも，操作論的意味において非局所的となる．前節でも説明したように，QET でアリスが局所的測定によって注入したエネルギーはアリス周辺の量子場だけを励起するが，一方ボブ周辺の零点振動は全く励起されない．しかしアリスの得た情報を知ればボブはその局所的真空からエネルギーを取り出せた．真空は無を意味するはずだったのに，である．つまり離れた場所にだけエネルギーが存在していても，何らかの情報さえあれば，そのエネルギーを担保にして局所的真空からエネルギーを前借りし，利用できる場合があるのだ．この量子的エネルギーの性質を大域的操作性と呼ぶ．この性質をブラックホール物理学に応用すると，そのエントロピーに対しても面白い知見が得られる．

ブラックホールは事象の地平面に比例した熱力学的エントロピーを持つことが知られている．その背景には統計力学的理解が期待されるが，エントロピーに寄与するミクロ状態がブラックホール時空のどこに存在しているのかに関しては，未だに答えがない．それが地平面内部の特異点に集中しているのか，地平面直上にあるのか，または地平面外部に存在するのかが，明確ではない状況にある．しかし QET を地平面の外部において行うと，量子場の真空に隠れている情報とブラックホールのエントロピーの間に非自明な関係性が存在することが分かる[12)]．

質量が無限に大きいブラックホールの地平面近傍の外部領域では，量子場は平坦なミンコフスキー時空における真空状態と同じ状態にあることが知られている．1 次元ブラックホールの場合には，地平面はミンコフスキー時空における 1 本の光の測地線に対応し，図 11 中の点線にあたる．このことを踏まえて，非常に重いブラックホールの地平面の外で，図 12 のようにアリスが量子場の揺らぎを測定すること考えよう．測定によって量子場には正のエネルギーの波束が生成し，ブラックホールに落ちて吸収される．そのためブラックホールの

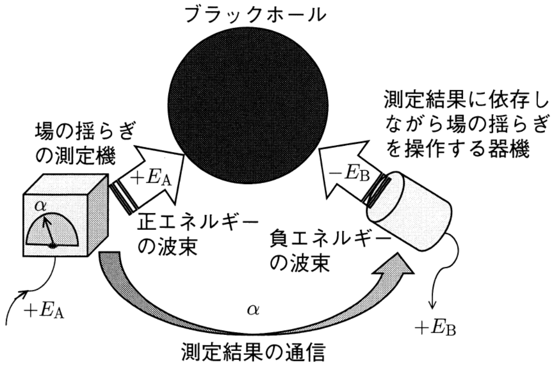


図12　ブラックホール時空における QET 思考実験.

エネルギーは増加し，地平面の面積も増える．結果としてエントロピーも増加する．もしアリスの得た量子揺らぎの情報がなければ，ブラックホールの地平面面積は増えたままで固定される．しかしアリスがボブに結果を伝えて，地平面外部の離れた地点での局所的真空からエネルギーを取り出す QET の操作を行うと，量子場に負エネルギーの波束が生成される．その負エネルギーを持った波束はブラックホールに落下し吸収され，今度はブラックホールのエネルギーを減少させる．この過程は，エネルギーの大域的操作性を使ってブラックホール内部からエネルギーを取り出したとも見なせる．ここで，地平面面積とエントロピーも同時に減っていることは，注目に値する．これまでブラックホールのエントロピーを減少させる過程は，Hawking 輻射しか知られていなかった．しかし無限に大きいブラックホールではこの輻射は起きないことが知られている．つまりこの QET は Hawking 輻射とは本質的に異なる，新しいブラックホールのエントロピーを減少させるメカニズムになっている．興味深いのは，もしアリスが測定結果の情報を失ってしまった場合，ボブに結果を伝えることができなくなり，ブラックホールのエントロピーを減少させられないという事実だ．つまりアリスが地平面の外の真空から取り出した情報は，ブラックホールのエントロピーに深く関わっている．量子情報物理学的視点から得られたこの知見は，今後ブラックホールのエントロピーの起源の理解に対しても，新たな視点を与えるのを期待している．

6. おわりに

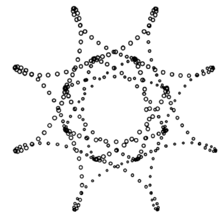
QET は，ブラックホール物理学等における概念的な問題だけでなく，量子デバイス開発等の工学的応用に対しても興味深い．量子ホール系を使った具体的な検証方法も提案され[13]，近い将来に実験的に確認される可能性も高い．また量子情報物理学の新しい視点は，これまでの物理学的視点を超えて，より深い世界観を提供してくれることだろう．

参考文献

1) 最新のレビューは，以下からダウンロード可能：http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/～hotta/
2) R. Penrose, (1989), "The emperor's new mind", (Oxford Univ. Press).
3) J.A. Wheeler, (1990), W. Zurek, ed., "Information, physics, quantum: The search for links", *Complexity, Entropy, and the Physics of Information* (Addison-Wesley).
4) R. Landauer, *Phys. Lett. A***217** (1996), 188.
5) 畔柳竜生「エンタングルメントとブラックホール熱力学」本誌 2011 年 10 月号.
6) W.G. Unruh, *Phys. Rev. D***14** (1976), 870.
7) W.K. Wootters and W.H. Zurek, *Nature* **299** (1982), 802.
8) C.H. Bennett *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 1895.
9) W. Pusz and S.L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.* **58** (1978), 273.
10) M. Hotta, *Phys. Lett. A***374** (2010), 3416.
11) Y. Nambu and M. Hotta, *Phys. Rev. A***82** (2010), 042329.
12) M. Hotta, *Phys. Rev. D***81** (2010), 044025.
13) G. Yusa, W. Izumida and M. Hotta, *Phys. Rev. A***84** (2011), 032336.

（ほった・まさひろ，東北大学大学院理学研究科）

中性子による量子干渉



長谷川　祐司

1. はじめに

量子力学の歴史は黒体輻射の説明のために1900年にプランクによってエネルギー量子仮説が導入されたことによって幕が切られた．その後，1905年にアインシュタインがこの量子化の概念を用いて，光が粒子としての性質を持つこと，すなわち光量子仮説を発表した．それによると，光の量子である光子一個のエネルギー E は，プランク定数 h と振動数 ν によって，$E = h\nu$ と与えられる．さらに光子一個の運動量 p は進行方向に，光速 c と波長 λ で，$p = h\nu/c = h/\lambda$ と与えられる．この光子の運動量は1923年にX線による電子の散乱の観察におけるコンプトン効果の発見によって確認された．

一方，電子のような「ミクロな粒子」が波の性質をもち得るという，**物質波**のコンセプトは1924年にド・ブロイにより提唱された．この物質波の波長 λ は，粒子の運動量 p，質量 m と速度 v により，$\lambda = h/p = h/mv$ と与えられる．このような物質波は，初期には，主に電子線の回折・干渉現象として観測された．その後，物質波による現象は電子に限らず中性子，原子，さらには複合分子の領域でも観測されるようになってきた．光子の場合は言わずもがな，電子や中性子のように，元来，粒子と見られてきた物質をも粒子と波の両方の性質をもち得ることは，量子力学が構築される以前の古典力学では全く予想されないことであり，粒子と波動の二重性として量子力学の特徴の一つとして知られている．

このように光子や「ミクロな粒子」が古典力学とは異なる性質をもち得ることが知られた後に，量子力学は新たなる定式化を受け，さらなる段階に発展した．それは，1925年のハイゼンベルクによる行列力学と1926年のシュレディンガーによる波動力学である．両者の違いは表面的な違いに過ぎず，両者が数学的に等価であることは後に証明された．シュレディンガーによってもたらされた波動関数を扱うシュレディンガー方程式の解釈を進める段階で（いわゆる）コペンハーゲン解釈がもたらされた．時を同じくして，ハイゼンベルクは不確定性原理を提唱し，相補性という概念も導入した．

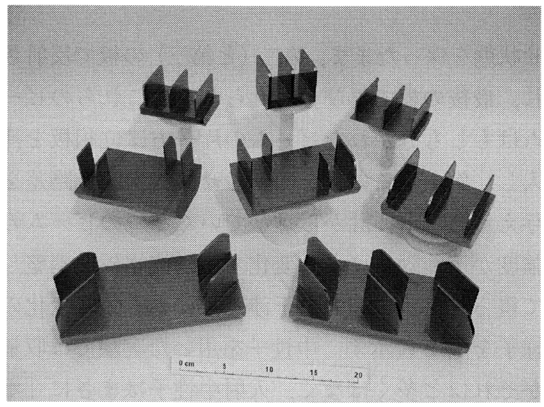
量子力学が相対性理論と並んで「現代」物理学で大きな役割を果たしていること，また，量子力学の適用範囲は物理学のみならず化学や生物学の領域にもわたり，量子力学の予想がいずれも正しかったことはよく知られている．さらに物性物理学の発展に大きく寄与し，現代の科学技術の発展の基盤となっていることは誰もが認めることである．一方，量子力学発展の初期の段階から多くのディベートがあった．とくに，決定論的ではない確率論的な側面，シュレディンガーの猫として知られている逆説的な現象，あるいは，測定理論，EPR（アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン）の実験といったものの多くはいまだに統一的

表 1　中性子の粒子性と波動性[1].

粒子的な性質	波動的な性質
$m = 1.674928(1) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$	$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 1.319695(20) \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$
$s = \frac{1}{2}\hbar$	
$\mu = -9.6491783(18) \times 10^{-27}\,\mathrm{J/T}$	$\lambda = 1.8\,\text{Å},\ \lambda_B = \frac{h}{mv} = 1.8 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$(熱中性子)
$\tau = 885.7(0.8)\,\mathrm{s},\ v = 2200\,\mathrm{m/s}$ (熱中性子)	
u-d-d クォーク構造	
m:質量, s:スピン, μ:磁気モーメント, τ:β-崩壊寿命, v:速度	λ_c:コンプトン波長, λ_B:ド・ブロイ波長

な見解が見出されていない．

量子物理学の実験は，多くの場合，可視光領域の光子あるいはその光子と物質との相互作用を利用した光学実験として行われてきた．量子効果を研究する，**重ね合わせ**や**絡み合い**（**エンタングルメント**）状態に真正面から取り組んだ研究には干渉，相関実験が不可欠である．このような実験は，レーザーを使った可視光領域のみならず，物質波を用いても盛んに行われている．本稿では，長年，物質波を用いた最も有効な量子力学の研究法として確立している中性子を用いた研究を紹介する．


図 1　様々な中性子の物質波を用いた干渉計．

2. 粒子性と波動性を持つ中性子

中性子は陽子とともに原子核の構成要素の一つであり，電荷がゼロの中性な粒子である．量子力学によると中性子は粒子と波動の二重の性質をもつ．例えば，質量 m，スピン s，磁気モーメント μ，β-崩壊寿命 τ，などは典型的な中性子が粒子として示す性質である．さらに中性子は 2 個のダウンクォークと 1 個のアップクォークで構成されている複合粒子でもある．その一方，コンプトン波長 λ_c，ド・ブロイ波長 λ_B，波長 λ などは典型的な中性子が波動として示す性質である．両者の具体的な値を表 1 に示す．このような中性子は，自然界の四つの力，(電磁力，重力，弱い力，強い力) すべてとの相互作用がある．

3. 中性子の物質波を用いた干渉計

量子力学の研究に限らず，干渉効果の観測にはヤングの二重スリットのように 2 つの光線が合わさったときにみられる干渉縞を観測するのが一般的である．このような，干渉効果の観測のための機器を**干渉計**といい，様々なタイプがあり，研究のみならず応用にも使用されている[2]．例えば，マイケルソン・モーリーの干渉計は光波の媒体としてのエーテルを否定する実験に用いられ，サニャック効果を利用したジャイロスコープによる加速度計も干渉計の一種である．

中性子の物質波による干渉効果の研究は，主にシリコンの完全結晶を用いたマッハ・ツェーンダータイプの干渉計を用いて行われてきた[3]．このタイプの中性子干渉計の概要と様々な干渉計の写真を図 1 に示す．この干渉計はビームの分割や反射にシリコンの完全結晶におけるブラック反射を用いている．また，使用しているビームの波長が数 Å と非常に短いため，各光学要素の調整が不要になるように，完全結晶から切り出した単体構造をしている．入射した中性子線は第一枚目の板で 2 つに分けられる．これらのビームは巨視的に（一般的に数 cm）離れるが，コヒーレントな重ね合わ

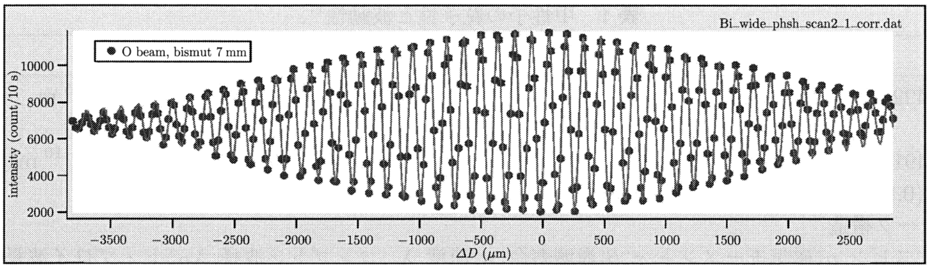


図 2　位相板により位相を変化させたときの干渉効果による強度変化.

せ状態を保ったまま，第二（と第三）の板で反射され，最後の板で再び合わせられる．これらのビームはもしも分かれたビームの片一方に位相板を挿入し，例えばこの板を回転させて光学的光路差を与えると，干渉計から離れていく 2 つのビームの強度が干渉効果により変化する．位相板を調整して得られた，典型的な干渉効果による強度変化の様子を図 2 に示す．中性子を用いた実験では収量がそれほど多くはなく，入射中性子はまさに「ポツポツ」とやってくる．この一つ一つの中性子が重ね合わせ状態を保ったまま巨視的に分け，再び合わせるとそれぞれが干渉し，さらに多くの収量をためると干渉パターンが観測されるのは，量子力学の要請とはいえ，よく考えると不思議である．

このようなシリコン完全結晶を用いた干渉計を用いて，中性子干渉実験がたくさん行われてきた．例えば，1/2 スピンの 4π 周期性，中性子の質量を利用した重力ポテンシャルの影響，フィゾー効果，サニャック効果の観測の実験は，物質波を用いた干渉実験の先駆的なものである．さらに，共鳴磁場による異なったエネルギーを持つビームの量子干渉効果，トポロジカルな量子力学的位相（別名，幾何学的位相とも呼ばれている）等を観測する実験はこの分野の「古典」として知られている．

4. 中性子の干渉計実験 1：スピンの重ね合わせ実験

量子力学の予測によると，コヒーレントで直交した基底状態の重ね合わさった状態は，それぞれの基底状態とは全く異なる性質を持つことが知られ

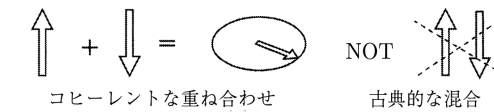


図 3　スピンの重ね合わせの概念図．アップとダウンのスピンの重ね合わせは新たなスピン状態になり，それぞれの混合ではない．

ている．この現象は，アップとダウンの**スピン**状態を基底状態とした重ね合わせの状態を観測するときに顕著に観測できる．すなわち，アップとダウンのスピン状態の重ね合わさった状態は，古典的に類推されるようなそれぞれのスピン基底状態の混合ではなく，全く新しいスピンの純粋状態，今の場合それぞれのスピンベクトルと 90 度をなす方向のスピン状態になる．さらに，新たなスピンベクトルの方位角は元の基底状態の相対位相に依存する．図 3 にこの現象の概略を示す（量子情報理論では，量子 2 準位系を利用したキュービットをブロッホ球で記述するが，その記述に従うと，北極と南極に向いたベクトルを持つ基底状態を重ね合わせると新たな状態のベクトルは赤道上になる．そして，まさにその方位角が基底状態の相対位相で与えられることになる）．この現象は 1963 年にウィグナーの観測の問題に関する論文[4]によって指摘されたが，初めての観測に至るまでには 20 年を要した．

中性子の干渉計を用いると相互に直交したアップとダウンのスピン状態の重ね合わせを作り，その重ね合わさった状態のスピンの方向を測定することができる．実験[5]では，中性子は磁気プリズムを使ってアップの方向に偏極させたのちに干渉計へ入射させる．干渉計の初めのビームスプリッ

ターで2つの経路に分かれた中性子線の一方に，スピン方向を180度回転させるスピン・フリッパーを挿入し，このビームのスピン方向をダウン方向にする．さらに，別れた2本のビームの相対的な位相は位相板によって外部から調整する．この結果，干渉計の最後の部分で再び重ね合わされた最終的な2本の干渉波は，理論的には，それぞれ相対位相が調整されたアップとダウンのスピンの重ね合わせ状態になる．中性子干渉計実験では，まず，アップ（ダウン）の方向のスピン解析が行われ，重ね合わされた状態の相対位相に依存しないことから，理論の予言通り，一方の干渉波

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle + \exp(i\chi)|\downarrow\rangle\right] \qquad (1)$$

（χ は相対位相）のスピン状態がアップとダウンの混合ではないことが明らかになった．また，アップ（ダウン）方向と垂直方向のスピン解析の結果は，重ね合わされた状態のスピンの方向がもともとのスピンベクトルと90度をなす方向にあり，かつ，その方位角は元の重ね合わされた状態の相対位相に依存していることを明確に示した．この実験に用いられたスピン・フリッパーは水冷化された特殊な形態をしており，実験上望ましくない熱的擾乱を避けるように作られているのは，特筆すべきである．

この実験は，後に，時間依存した磁場を使ったスピン・フリッパーを用いることにより，アップとダウンのスピン状態の「干渉」による時間軸上でのスピンの回転を観測するように発展した．また，量子2準位系をブロッホ球を用いて記述する量子情報理論のキュービットをコヒーレントに操作した始まりでもある．

5. 中性子の干渉計実験2：測定における物理量の状況依存性の実験

確率論的ではなく決定論的な予測を量子力学に与えるべき理論の一つとして有名なものの中に，局所的な**隠れた変数理論**がある．ベルの不等式は，この理論が満たすべき相関の上限を与えるが[6]，量子力学はさらに強い相関を予言する．ベルタイプの不等式の破れを初めて明瞭に示したのは，20年近く後のアスペによる光子の相関実験においてである[7]．その後，光子間に限らず様々な系においての相関実験でベルタイプの不等式の破れが観測されている．局所的な隠れた変数理論の研究の一方，古典物理学の類推で「状況依存性を持たない理論」の研究も行われてきている．この理論は，物理量 A と同時測定が可能な（可換な）物理量 B と C があるとき，測定の組み合わせ（測定の状況）に依存しないで，すなわち A & B の測定と A & C の測定共通の，実在的な値を物理量 A に持たせることの可能性を説いている．量子力学の予言は，このような状況依存性を持たない物理量を否定する．すなわち，同時測定が可能な物理量の測定においても，それぞれの物理量の測定結果は（可換であるにも関わらず！）どの物理量と一緒に測定するかに依存する．これは古典的な測定で，例えば洋服（A）とズボン（B）の色を測定するか，洋服（A）と靴（C）の色を測定するかによって洋服の色が変わってしまうとしたら，奇妙に感じることが，量子力学では実際に起こっていることを示唆している．

量子測定における物理量の状況依存性を示す実験を行うには，実際の実験で測定可能でかつ調整可能な可換な物理量を用いなくてはならない．図4に量子実験で盛んに用いられる様々な**量子2準位系**を示す．まずは，4節のスピン重ね合わせ実験で用いられた1/2スピンは，アップとダウンの相互に直交した基底からなり磁場との相互作用から

1/2スピン

$$|s\rangle = \begin{bmatrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{bmatrix}, \qquad \widehat{H}_{int} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$$

ラーモア歳差運動

2準位原子

$$|\phi_{\mathrm{atom}}\rangle = \begin{bmatrix} |e\rangle \\ |g\rangle \end{bmatrix}, \widehat{H}_{int} = i\hbar g_k \left\{ |e\rangle\langle g|\widehat{a}_k \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} - |g\rangle\langle e|\widehat{a}_k^{\dagger} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} \right\}$$

ラビ振動

2経路干渉計

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} |\Psi_{\mathrm{I}}\rangle \\ |\Psi_{\mathrm{II}}\rangle \end{bmatrix}, \quad \widehat{H}_{PS} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{+i\chi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\chi} \end{bmatrix}$$

サインカーブ調の強度振動

図4　様々な量子2準位系．

なる相互作用ハミルトニアンによりラーモア歳差運動を示す．また，基底状態と励起状態からなる原子の2つのエネルギー準位も典型的な量子2準位系である．ここでは，例えばレーザービームとの相互作用により，2準位間の遷移が起こるラビ振動として知られている．さらに，中性子干渉計実験で有用な2重スリット実験においても，それぞれの経路のビーム状態を基底と取ると位相板の操作によりサインカーブ調の強度振動が起こる．これも典型的な量子2準位系の操作によるものである．これら以外にも，量子通信技術には光の偏光状態を量子2準位系として用いている．中性子干渉計実験では，中性子の内部，外部自由度である，1/2スピン状態と2重スリット実験でのビーム状態のオブザーバブルをそれぞれ可換な物理量のオブザーバブルとして使用している．

実際の実験では，偏極した入射ビームから，干渉計内でスピン空間と経路空間がエンタングルした疑似ベル状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle\ |\mathrm{I}\rangle + |\downarrow\rangle\ |\mathrm{II}\rangle\right] \tag{2}$$

を作り出し，スピン空間のオブザーバブルと経路空間のオブザーバブルの相関測定を行った．この実験配置を図5に示す．アップに偏向したビームは干渉計に入射後に2つの経路に分けられ，そのうちスピンターナーによって疑似ベル状態を作り出す．経路空間のオブザーバブルの変数 ϕ は干渉計名の位相板によって，スピン空間のオブザーバブルの変数 α は干渉計後のスピン回転器と偏向子によってそれぞれ独立に調整する．この実験では異なるヒルベルト空間に属する位相 ϕ と α の相関を測定し，ベルタイプの不等式を用いて，状況依存性を持たない物理量を仮定した場合よりも相関が強いことを明確に示した[8]．すなわち，同時測定可能であり可換である，経路に関する物理量とスピンに関する物理量それぞれの測定結果は，測定以前には結果が定まっておらず，いずれの組み合わせで測定するかに依存する．これは先の例でいうところの，洋服の色がズボンと一緒に測定すると青になり，あるいは靴と一緒に測定すると赤になるといった具合の現象を中性子（の「洋服」「ズボン」「靴」）を用いて示したことになる．

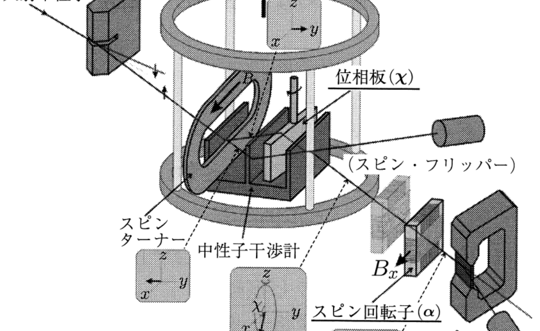


図5　ベル不等式の破れを観測した中性子干渉実験．

この実験は，その後，統計精度の向上[9]にとどまらず，エンタングルメントした状態のトモグラフィー測定[10]，エネルギー自由度を加えた3体系でのいわゆるグリーンベルガー・ホルン・ザイリンガー（GHZ）状態での実験[11]へ発展した．さらに，ベルの不等式では測定結果からの統計的な破れのみが示されるのに対し，量子論の予言と状況依存性の仮説との間の矛盾を示す実験[12]をも様々な系で行われるようになってきた．

6. 中性子の干渉実験3：中性子偏向解析装置

上記のような干渉計を用いた光学実験以外にも，中性子のスピンの干渉を利用した中性子偏向解析実験を使っても量子光学実験が可能である．装置の外観を図6に示す．この装置は，偏向した入射ビームを試料に照射したあとの出射ビームの偏向を解析する機能を持ち，元来，試料による消偏極（depolarization）を測定するのに使われてきた．先の干渉計実験では2つの経路の状態が基底状態になっているのに対し，この偏向解析装置ではアップとダウンの2つのスピン状態が基底状態になる．4節のスピンの重ね合わせ実験にあるように，これらのスピンの基底状態の相対位相は出射ビーム

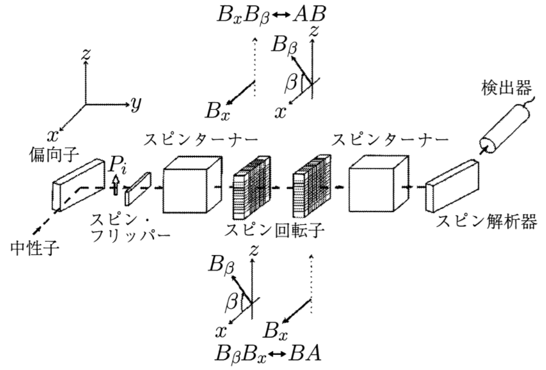


図 6 中性子偏向解析装置.

の偏向解析をすることにより測定できる．干渉計を用いた実験では装置全体の安定性に，多少，難があったが，この偏極解析装置では安定した環境で実験が可能である．その上，スピンの操作の効率は非常に高く，そのため最終的に理論値に近い上質の実験結果を得ることができるのも，この装置の利点である．

この偏向解析装置を使用してた実験の例として，量子力学の基本である非可換なオブザーバブルに関する実験がある[13]．偏向した入射ビームがサンプル (今の場合, 2つのスピン・フリッパー) を通過した後の偏向状態を解析する．パウリのスピン行列 σ_x と σ_z の非交換関係により, 2つの xz 平面内にある2つのスピン・フリッパーの順序を変えると出射するビームの偏向が異なることを観測している．すなわち, 印加磁場が x 軸方向を向いている場合 π スピン・フリッパーは $B_x \equiv -i\sigma_x$ として与えられ, 印加磁場が xz 平面内で x 軸から β の角度の方向を向いている場合は $B_\beta \equiv -i\sigma_x \cdot \cos\beta + \sigma_z \cdot \sin\beta$ として与えられるので，この2つの π スピン・フリッパーを正順 (B_xB_β), 逆順 ($B_\beta B_x$) にしたときに σ_x と σ_z の非交換関係による違いが現れる．入射ビームを $+z$ 方向に偏向させた場合は，y, z 方向の偏向は交換した操作でも同一だが，x 方向の偏向はそれぞれ異なった振舞いが実験によって観測された．入射ビームを $-z$ 方向に偏向させた同様の実験と合わせて，σ_x と σ_z の非交換関係が完全に示された．非交換なオブザーバブルが量子力学の「ミステリー」の一つである不確定性原理の源でもあることは，教科書で見直すまでもない．たとえ「数学的」には自明の事柄であっても，実際に「物理的な状況」で実証することは，我々の扱っている系に「物理的な意味」を与えるために重要である．

さらに，この偏向解析装置を用いることにより，ハイゼンベルクが1927年に提唱した測定誤差 (ε) と擾乱 (η) に関する**不確定性関係**

$$\varepsilon(q) \cdot \eta(p) \gtrsim h \tag{3}$$

(位置を正確に測定しようとすると運動量が乱される) が常に成り立たず「新たなる不確定性関係」のみが満たされることも報告されている[14]．この「新たなる不確定性関係」は厳密な「不確定さ」の定義から小澤正直氏により導出され，測定値のばらつきを示す標準偏差 (σ) を加えて,

$$\varepsilon(A) \cdot \eta(B) + \sigma(A) \cdot \eta(B) + \varepsilon(A) \cdot \sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{4}$$

という形で表される[15]．中性子偏向解析装置を応用した2段のスピン解析をし，様々な方向に偏向させたビームをこの装置に入射させた．得られたデータを解析することにより，旧来のハイゼンベルクの提唱した不確定性が破れ,「新たなる不確定性関係」のみが満たされていた．

7. その他の中性子の干渉実験

上記に説明した実験以外にも，干渉計・偏向解析装置を使った実験では，弱い測定とも関連するポストセレクションの効果，中性子と光子のエネルギー多重交換，閉じ込めによる量子化の効果の観測，干渉性の消失 (decoherence)，ベリー位相・トポロジカル位相，エンタングルメントに関する実験等が報告されている[9]．また，物理量の実在性をも疑問視するレゲットによるモデルの物質波を使った初めての検証実験も行われている．これらの実験はすべて，中性子の波動的な性質，特に重ね合わさった非局在な状態を十分に活用し，操作している．

結晶を使った波長が数Å 程度の**熱中性子**に限ら

ず，冷却により中性子のエネルギーを下げることにより得られる，波長の長い，**冷中性子**を用いた光学実験も行われるようになってきている．ビーム操作の光学要素は言わずもがな，干渉計の機能も確認されてきている．低エネルギーの中性子を使うことにより，各種の相互作用時間を長くとることが可能になるため，これからの進展が期待される．この領域では，入射ビームの単色化を必要としない，非弾性・準弾性散乱における高エネルギー分解能を持つスピンエコー分光器を光学実験に応用する動きがみられる．

さらに中性子を冷却し速度が自転車並みの秒速7 m/s程度以下になると，運動エネルギーが物質との相互作用よりも小さくなり，実験容器に閉じ込めることが可能になる（このような十分エネルギーの低い中性子を**超冷中性子**とよぶ）．例えば，このような超冷中性子は数百秒にも及ぶ時間，容器に閉じ込めることが可能で，永久電気双極子モーメント（EDM）やβ-崩壊寿命の精密測定に使われている．最近では，この長い相互作用時間を利用して，量子状態の操作における外部ノイズに対する強靭さの測定実験[16]など，量子効果の測定実験も行われるようになってきている．

最後に，中性子を使った光学実験は，日本でも原子力研究所のグループはもとより，冷中性子を使って京都大学原子炉研究所のグループ，超冷中性子を使った高エネルギー加速器研究機構のグループによっても行われていることを付記する．

8. おわりに

ここで紹介した中性子を使った量子干渉実験は，応用よりも量子力学の基礎の研究を目指している．特に，中性子の物質波を使って量子物理学の検証，解釈，あるいは新現象を求めて行われている．その結果，数十年前までは単なる思考実験レベルでしかなかった量子力学の予言する多くの現象が，現在では実際に実験として具体化された．その過程で，量子力学特有のスピン，位相，重ね合わせ，エンタングルメントなどに関する認識が深まった．さらには量子力学創生期に提示された不確定性を破る実験まで行われるようになり，量子力学の基礎的概念の再考を促している．量子物理実験はレーザー・光子を用いた実験から，原子，分子を用いた実験まで様々な手法がある．応用に関しては光源や実験器具のサイズの点で他の系を用いた実験に比べ多少分が悪いかもしれないが，多くの思考実験を実現化し，量子物理学の発展に寄与している，中性子光学実験の有用性はいくら強調してもしすぎることはない．

謝辞：ここで紹介した研究の多くは，著者がウィーン工科大学において，Rauch教授，Badurek教授，そして日頃議論をし共に実験に携わった当地の多くの学生との研究成果に基づいている．これらの関係者に感謝します．

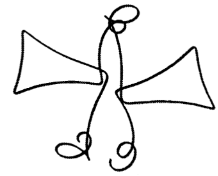
参考文献

1) K. Nakamura *et al.*, *J. Phys. G* **37** (2010) 07501.
2) A.D. Cronin *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 1051.
3) H. Rauch and S.A. Werner: *Neutron Interferometry* (Clarendon, Oxford, 2000).
4) E.P. Wigner, *Am J. Phys.* **31** (1963) 6.
5) J. Summhammer *et al.*, *Phys. Rev. A* **27** (1983) 2532.
6) J.S. Bell, *Physics* **1** (1964) 195.
7) A. Aspect *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
8) Y. Hasegawa *et al.*, *Nature* **425** (2003) 45.
9) Y. Hasegawa *et al.*, *New J. Phys.* **13** (2011) 115010.
10) Y. Hasegawa *et al.*, *Phys. Rev. A* **76** (2007) 052108.
11) Y. Hasegawa *et al.*, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 032121.
12) G. Kirchmair *et al.*, *Nature* **460** (2009) 494; H. Bartosik *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 040403; E. Amselem *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 160405.
13) Y. Hasegawa and G. Badurek, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 4614.
14) J. Erhart *et al.*, *Nature Physics*, DOI:10.1038/NPHYS2194.
15) M. Ozawa, *Phys. Rev. A* **67** (2003) 042105; *Phys. Lett. A* **318** (2003) 21; *Ann. Phys.* (N.Y.) **311** (2004) 350.
16) S. Filipp *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 030404.

（はせがわ・ゆうじ，ウィーン工科大学）

分子と量子力学

量子もつれのダイナミクス



河内　宣之

1. はじめに

この記事では**量子もつれ**励起水素原子ペアのダイナミクス（動的過程）が，単独の励起原子のそれと比べて，どのように異なるのかを紹介したい．本雑誌のタイトルからすると異質かもしれないが，実は実験の話である．

量子力学が化学に導入されて，化学が一変したといっても過言ではなかろう．少なくとも量子力学抜きで現代化学を語ることは不可能である．ところが量子もつれが化学の世界でどのような役割を果たすかという問題意識はこれまで希薄であったように思われる．我々化学者にとってなじみの深い二電子系のスピン固有状態（あとで示すように4個ある）のうち，2つが**量子もつれ状態**であるように，実は化学と量子もつれは相性が良いのかもしれない．私は，ふとしたことがきっかけで量子もつれの世界に最近入り込んできたのだが，化学の世界における量子もつれの役割の一端をご紹介したい．実は，身近なところで大きな役割を果たしているらしいのだ．

2. 量子もつれとは

量子もつれというと，では古典もつれとは何だという質問が来そうなので，単にもつれ（entanglement）のほうが良いように思える．しかし量子もつれが日本語として定着したようなので，本稿でもこの言葉を使うことにする．我々の直感に従うと，全系は状態の定まった部分系から構成されているはずである．十分に離れた2つの部分系 A と B からなる系 T を取り上げる．部分系 A の状態を $|\psi_a\rangle$, $|\psi_{a'}\rangle$ とし，部分系 B の状態を $|\phi_b\rangle$, $|\phi_{b'}\rangle$ としよう．もし我々の直感通りであるならば，系 T の状態 $\left|\Psi^T\right\rangle$ は例えば

$$\left|\Psi^T\right\rangle = |\psi_a\rangle\,|\phi_b\rangle \tag{1}$$

となる．このような状態が存在することは確かであるが，我々の直感に反し，部分系の状態が定まっていない全系の状態も存在する．それが量子もつれ状態 $\left|\Phi^T\right\rangle$ であり，例えば

$$\left|\Phi^T\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_a\rangle\,|\phi_b\rangle + |\psi_{a'}\rangle\,|\phi_{b'}\rangle\right) \tag{2}$$

となる．言葉を換えると，量子もつれ状態とは，部分系 A の状態と部分系 B の状態の積では表せない状態である．一方，$\left|\Psi^T\right\rangle$ のように，そのような形で表すことができる状態を**積状態**という．わかりやすい具体例として冒頭で述べた二電子系（電子ペア）のスピン固有状態を取り上げよう．2つの電子それぞれに1および2なるラベルをつける．電子のスピン固有状態を伝統に従い $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ と記す．電子1のスピン固有状態が $|\alpha\rangle$ であることを $|\alpha(1)\rangle$ というように書くことにする．すると以下に示すように，二電子系のスピン固有状態が4つ得られる．

$$\chi_{1,1} = |\alpha(1)\rangle\,|\alpha(2)\rangle\,, \tag{3}$$

$$\chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha(1)\rangle\,|\beta(2)\rangle + |\beta(1)\rangle\,|\alpha(2)\rangle), \tag{4}$$

$$\chi_{1,-1} = |\beta(1)\rangle\,|\beta(2)\rangle\,, \tag{5}$$

$$\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha(1)\rangle\,|\beta(2)\rangle - |\beta(1)\rangle\,|\alpha(2)\rangle). \tag{6}$$

ここで $\chi_{S,M}$ の S は，二電子系のスピン角運動量の大きさを与える量子数であり，M はその z 成分を与える量子数である．$\chi_{1,1}, \chi_{1,0}$ および $\chi_{1,-1}$ 状態は三重項状態とよばれ，$\chi_{0,0}$ 状態は一重項状態とよばれる．一重項状態は量子もつれ状態であるが，三重項状態のうち 1 つはもつれ状態であるものの（$\chi_{1,0}$），残りの 2 つは積状態である（$\chi_{1,\pm1}$）．

水素分子を二重光イオン化させると，放出される電子ペアは，選択則から考えて，$\chi_{0,0}$ 状態（もつれ状態）にあると予想される．つまり電子 1 のスピン固有状態も電子 2 のスピン固有状態も定まらないという，実に奇妙なことになる．さてそこで，素朴な疑問が沸き起こる．それは，“水素分子の光解離によって生成する水素原子ペアは，量子もつれ状態にあるのか，どうか” である．

3. 水素分子の光解離により量子もつれ原子ペアができるのか？

上記の疑問に答えるために以下のような過程に注目しよう．$h\nu$ は入射光子を，$h\nu_{\text{Ly-}\alpha}$ は **Lyman–α 光子**を表す．

$$\mathrm{H_2} + h\nu \rightarrow \underline{\mathrm{H_2(Q_2{}^1\Pi_u(1)\ state)}}$$
$$\hookrightarrow \underline{\mathrm{H(2p) + H(2p)}}$$
$$\hookrightarrow \mathrm{H(1s) + H(1s)} + h\nu_{\text{Ly-}\alpha} + h\nu_{\text{Ly-}\alpha}. \tag{7}$$

非常に基本的なことをおさらいしておくと，**2p 準位**にある水素原子は Lyman–α けい光を自発的に放出して **1s 準位**に遷移する（この遷移以外に自発的放出遷移は起こらない）．また 2p 状態の寿命は磁気量子数によらず 1.60 ns であり，Lyman–α けい光の波長は 121.6 nm である．過程 (7) が起こるということと **H(2p) 原子ペア**を生み出す水素分子の状態が $^1\Pi_u$ なる対称性を有していることは十分に分かっている[1]．したがってペア中の一方の H(2p) 原子の**磁気量子数** m は 0 であり，他方の磁気量子数は ±1 である．Π とは，電子の軌道角運動量の分子軸成分が，$\hbar$ を単位として，±1 であることを意味している．すなわち，この場合の水素原子の磁気量子数とは，2 つの陽子を結ぶ軸についてのそれである．さっそく核間距離 r が無限大の極限における $^1\Pi_u$ 状態を書いてみよう．そのとき，水素分子の電子ハミルトニアンと任意の核間距離で交換する演算子の固有状態でもあるように書く．そのような演算子とは，電子の軌道角運動量の分子軸（z 軸）成分の演算子 L_z，空間反転演算子 i，および電子 1 と 2 の交換の演算子 $P_{1,2}$ である．結果を以下に示す[2]．ただし陽子に a および b とラベルし，電子に 1 および 2 とラベルする．p につく下付き添え字は磁気量子数を表す．したがって，例えば $|2\mathrm{p}_1^a(1)\rangle\,|2\mathrm{p}_0^b(2)\rangle$ は，陽子 a に電子 1 が束縛された磁気量子数 1 の 2p 原子と陽子 b に電子 2 が束縛された磁気量子数 0 の 2p 原子のペア状態（積状態）を表すことになる．

$$\begin{aligned}
&\left|{}^1\Pi_u^+; r=\infty\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|2\mathrm{p}_1^a(1)\rangle\,|2\mathrm{p}_0^b(2)\rangle + |2\mathrm{p}_1^a(2)\rangle\,|2\mathrm{p}_0^b(1)\rangle \\
&\quad - |2\mathrm{p}_0^a(1)\rangle\,|2\mathrm{p}_1^b(2)\rangle - |2\mathrm{p}_0^a(2)\rangle\,|2\mathrm{p}_1^b(1)\rangle \\
&\quad - |2\mathrm{p}_{-1}^a(1)\rangle\,|2\mathrm{p}_0^b(2)\rangle - |2\mathrm{p}_{-1}^a(2)\rangle\,|2\mathrm{p}_0^b(1)\rangle \\
&\quad + |2\mathrm{p}_0^a(1)\rangle\,|2\mathrm{p}_{-1}^b(2)\rangle + |2\mathrm{p}_0^a(2)\rangle\,|2\mathrm{p}_{-1}^b(1)\rangle \Big).
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで左辺の上付き添え字 + の意味を述べておこう．ここでは入射光が直線偏光の場合を考えている．その偏光ベクトルと分子軸のなす平面についての鏡映演算子を考える．(8) 式の状態は，その固有値が 1 となるような状態なのである．Π 準位は二重に縮退しているが，直線偏光による光励起の観点から，2 つのうちの + 状態が選ばれる（もう一つの状態とは，もちろん $^1\Pi_u^-$ 状態である）．状態 (8) は，量子もつれ状態である．大切なことは，

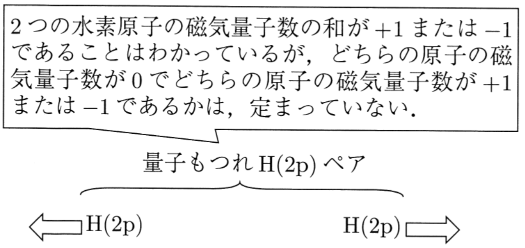


図 1 水素分子の光解離で生成した量子もつれ H(2p) 原子ペアの模式図．

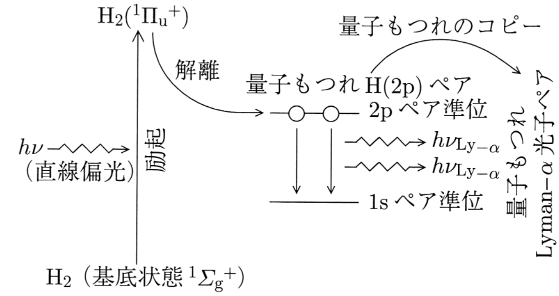


図 2 過程 (7) の左辺から右辺に至るシナリオの模式図．

量子もつれ状態を作ろうと意図したわけではなく，核間距離に関わらず保存される対称性（$^1\Pi_u^+$）がそのまま核間距離無限大においても保たれるように (8) 式右辺を書いただけである．Pauli の原理を満たさなければならない，すなわち電子 1 と 2 を交換する演算子の固有状態でなければならないことが，量子もつれ状態となる上で大きな意味をもっている．これに関して一言付け加えれば，(8) 式右辺にスピン固有状態 $\chi_{0,0}$（(6) 式参照）をかけたものが，電子のスピンも考慮した状態である．

結論を述べると，過程 (7) の水素分子の光解離により，量子もつれ H(2p) 原子ペアが生成しそうである（図 1）．

それでは，(8) 式の状態にある量子もつれ H(2p) 原子ペアが放出する **Lyman−α 光子ペア**は，やはりもつれているであろうか？ 光子ペアの状態（光子数状態）を調べてみると，以下のようであることが分かった[2]．

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big\{ (|\gamma_a\rangle\,|\phi_b\rangle - |\phi_a\rangle\,|\gamma_b\rangle) - (|\rho_a\rangle\,|\phi_b\rangle - |\phi_a\rangle\,|\rho_b\rangle) \Big\}. \quad (9)$$

ただし，$|\gamma\rangle$, $|\phi\rangle$，および $|\rho\rangle$ は，それぞれ水素原子における $\Delta m = -1, 0, 1$ の 2p → 1s 遷移に伴い放出される Lyman−α けい光の一光子状態である．例えば，$|\gamma_a\rangle$ とは，遷移 $|2p_1^a(1)\rangle \to |1s^a(1)\rangle$ または $|2p_1^a(2)\rangle \to |1s^a(2)\rangle$ によって放出される Lyman−α けい光の一光子状態である．(9) 式で表される光子ペアの状態は，やはり量子もつれ状態である．量子もつれ原子ペアからは，量子もつれ光子ペアが放出されることが分かった．すなわち原子ペアの量子もつれが，光子ペアにコピーされるのである．過程 (7) の左辺から右辺に至るシナリオを模式的に図 2 に示す．このような量子もつれのコピーは，様々な場面で見られる[3]．

4. シナリオは本当か？

図 2 に示すシナリオは，あくまでも理論予測である．それが本当かどうかを検証するためには何らかの量を測定し，それを計算結果と比較すればよい．そこで Lyman−α 光子ペアの角度分布に注目し，それを計算してみた[2]．そのために，**二光子相関関数** $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_c, t_c, \boldsymbol{r}_d, t_d)$ を計算した．二光子相関関数とは，位置 $\boldsymbol{r}_c$ に置いた検出器 c により時刻 t_c に，位置 $\boldsymbol{r}_d$ に置いた検出器 d により時刻 t_d に，光子がそれぞれ一つずつ検出される確率分布を表す[4]．これは電場演算子と (9) 式の $|\psi\rangle$ から計算される．

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(\boldsymbol{r}_c, t_c, \boldsymbol{r}_d, t_d) \\ &= \langle\psi|\,\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_c, t_c)\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_d, t_d) \\ &\quad \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_d, t_d)\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_c, t_c)\,|\psi\rangle . \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\boldsymbol{E}^{(+)}$ と $\boldsymbol{E}^{(-)}$ はそれぞれ電場演算子の正振動数部分と負振動数部分である．この二光子相関関数を計算したところ (11) 式が得られた[2]．

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(\boldsymbol{r}_c, t_c, \boldsymbol{r}_d, t_d) \\ &= A(\hat{\boldsymbol{r}}_c, \hat{\boldsymbol{r}}_d)\exp\left\{-\tau_{2p}^{-1}\left[(t_c + t_d) - \frac{2R}{c}\right]\right\} \\ &\quad \times \Theta\left(t_c - \frac{R}{c}\right)\Theta\left(t_d - \frac{R}{c}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

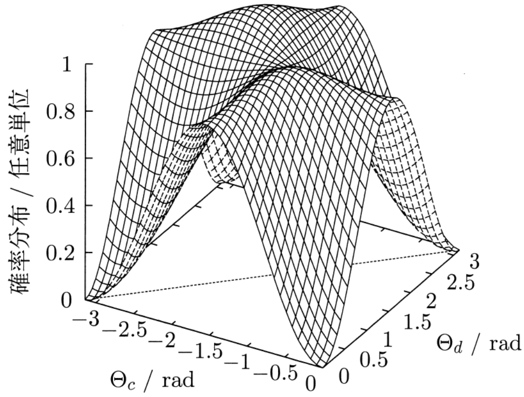


図 3　水素分子の光解離に由来する Lyman–α 光子ペアの角度分布（図 2 のシナリオに基づき計算した）.

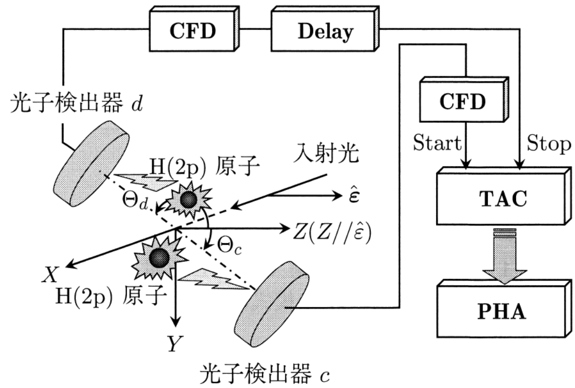


図 4　実験装置の概略.

ここで，τ_{2p} は H(2p) 原子の寿命を，R は水素原子ペアの重心から検出器までの距離を，c は光速を表す．すでに 3 節の冒頭で述べたように，$\tau_{2p} = 1.60\,\mathrm{ns}$ である．また $\Theta(...)$ はステップ関数であり，$\hat{}$ は単位ベクトルを表す記号である．$A(\hat{\boldsymbol{r}}_c, \hat{\boldsymbol{r}}_d)$ が Lyman–α 光子ペアの角度分布を与える．光子検出器 c と d を入射光軸に直交する面内に配置した場合の Lyman–α 光子ペアの角度分布を図 3 に示す[2)]．検出器 c と d の方向は，直線偏光した入射光の偏光ベクトルから測った角度 Θ_c と Θ_d により表すことにする．これらの角度の正の向きは，入射光軸におかれた右ねじを入射光の進行方向に進ませる回転の向きと定義する．このあたりのことは図 4 も参照されたい．ただし図 4 とは異なり，ここでの検出器は大きさをもたない点検出器である．

では，実際に Lyman–α 光子ペアの角度分布を測定してみよう．実験は，つくば市にある高エネルギー加速器研究機構物質構造科学研究所 放射光科学研究施設（通称 Photon Factory）のビームライン 20A にて行った．光子エネルギーは 33.66 eV であり，このエネルギーで過程 (7) の断面積（過程 (7) の起こりやすさの指標）は最大となる[1)]．実験装置の概略を図 4 に示す．光子検出器 c と d を入射光軸に直交する面内に置く．それぞれの方向は，直線偏光した入射光の偏光ベクトル $\hat{\varepsilon}$ から測った角度で表す．実は検出器 c と d は独立に回転するのではなく，図 4 に示すように常に入射光軸に直交する腕の上に位置しており，その腕が入射光軸を回転軸として回転する．すなわち角度 Θ_c と Θ_d の間には，$\Theta_d = \Theta_c + \pi$ の関係がある．図 3 の $\Theta_c\Theta_d$ 平面に引かれた破線は，直線 $\Theta_d = \Theta_c + \pi$ である．図 4 の装置で測定するのは，光子検出器 c での検出時刻を基準とする光子検出時間差の頻度分布である．最初に放出される Lyman–α 光子が検出器 d に検出される場合に備えて，検出器 d の系統に遅延回路（Delay）を置く．頻度分布スペクトル上には，相異なる 2 つの水素分子の光子吸収による 2 つの Lyman–α 光子に由来する頻度や種々のノイズに由来する頻度も加わるが，それらを差し引くことは容易であり，かつ本実験においてはそれらの寄与は無視し得る程度である．それぞれの Θ_c に対して光子検出時間差の頻度分布を測定する．それから Lyman–α 光子ペア検出の頻度がわかり，最終的に Lyman–α 光子ペアの角度分布が Θ_c の関数として求まる．果たして測定される角度分布は理論予測と一致するであろうか？

図 5 に示すのが，測定された Lyman–α 光子ペアの角度分布[5,6)] と理論予測[2)] である．実線は，図 3 の曲面を $\Theta_c\Theta_d$ 平面上の対角線（直線 $\Theta_d = \Theta_c + \pi$）に沿って切りとり，その断面を Θ_c の関数として示したものである．＋印はそれに装置の角度分解能をたたき込んだものである．すなわち＋印が理論予測ということになる．○で示したのが水素ガス圧力 0.40 Pa で測定した Lyman–α 光子ペアの角度分布であり，▲で示したのが水素ガス

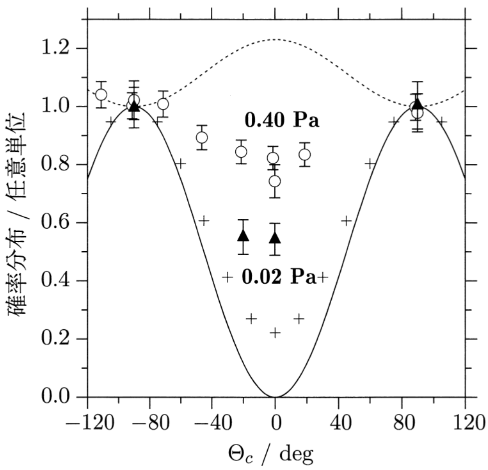


図5 水素分子の光解離に由来する Lyman–α 光子ペアの角度分布（実験結果と理論予測）.

圧力 0.02 Pa で測定した角度分布である．Lyman–α 光子検出の頻度と水素ガス圧力が，0.80 Pa まで比例関係にあることを確かめてあるので，検出されたLyman–α 光子ペアは，過程 (7) に由来しており，2 次的効果は無視し得る．さて測定されたLyman–α 光子ペアの角度分布が圧力の低下とともに理論予測（+）に接近することがわかる．このことから，水素分子の光解離により量子もつれ H(2p) 原子ペアが生成し（(8) 式），その量子もつれが Lyman–α 光子ペアにコピーされると結論される（(9) 式）．Lyman–α 光子を放出するときの 2 つの水素原子の間の代表的な距離は，解離の相対速度と H(2p) 原子の寿命の積として求められ，93 μm にも達する．ちなみに Lyman–α けい光の波長は，121.6 nm である．水素ガス圧力 0.02 Pa における角度分布（▲）と理論予測（+）の間には，食い違いが存在するが，これはおそらくは，水素ガス圧力がまだ十分には低くないこと，および入射放射光が完全な直線偏光ではないことに由来しているのであろう．光子ペアの量子もつれがその角度分布に与える効果を見るために，二光子状態 $|\gamma_a\rangle\,|\phi_b\rangle$ に対する Lyman–α 光子ペアの角度分布も図 5 に示す（破線）．ただしこの角度分布は，角度分解能をたたき込んでいない．$|\gamma_a\rangle\,|\phi_b\rangle$ 状態は，もつれ状態ではなく積状態である（2 節を参照）．光子ペアの角度分布測定が，光子ペアおよびそれを放出する原子ペアに現れる量子もつれのよいプローブであることが分かる．

図 5 で不思議なことは，Lyman–α 光子ペアの角度分布に圧力効果が現れることである．上述のように，Lyman–α 光子検出の頻度と水素ガス圧力が，0.80 Pa まで比例関係にあることを確かめてあるので，図 5 に示すような圧力では 2 次的効果は起きていないはずである．例えば H(2p) 原子が H_2 分子と反応して H(2s) 原子に変わるようなことはないと思われる．では何が起きているのであろうか？ おそらくは，量子もつれ H(2p) 原子ペアが H_2 分子と反応して，量子もつれが変化する，あるいは消失しているのであろう[5]．私たちはこの反応を“量子もつれ原子ペア反応”と名付けた．この反応の始状態は (8) 式であるが，終状態は不明である．この反応の断面積（反応の起こりやすさの指標）を圧力効果から見積もったところ，$10^{-13} \sim 10^{-12}\,\mathrm{cm}^2$ にも達することが分かった[5]．先ほどの $\mathrm{H(2p)} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{H(2s)} + \mathrm{H_2}$ 反応の断面積が $10^{-14}\,\mathrm{cm}^2$ に過ぎないことを考えると，如何に大きな断面積であるかがわかる．量子情報の観点から質量のある量子的粒子と質量のない粒子（光子）を比較するとき，質量ある粒子の長所として，静止できることが上げられ，短所としてその量子もつれが環境との相互作用に対しもろいことが上げられる．確かに原子ペアの量子もつれは，私たちが常識的に知っている反応よりも，100 倍程度も速く変化してしまうようである．以上の議論から，水素ガス圧力 0.02 Pa においては，0.40 Pa におけるよりも，より多くの量子もつれ H(2p) 原子ペア（(8) 式）が生き残っていると結論できる．

5. 量子もつれ H(2p) 原子ペアの不思議な崩壊ダイナミクス

さて今度は，Lyman–α 光子ペアの角度分布ではなく，二光子の検出時間差 Δt の頻度分布 $F(\Delta t)$ に注目しよう．ここで $\Delta t = t_d - t_c$ である．$F(\Delta t)$ は，$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_c, t_c, \boldsymbol{r}_d, t_d)$ から以下のように求まる．

もちろんこれは理論予測である．

$$F(\Delta t) = K\int_{-\infty}^{+\infty} G^{(2)}(\boldsymbol{r}_c, t_c, \boldsymbol{r}_d, t_c+\Delta t)\mathrm{d}t_c = \frac{K\tau_{2\mathrm{p}}A(\hat{\boldsymbol{r}}_c, \hat{\boldsymbol{r}}_d)}{2}\exp\left(-\tau_{2\mathrm{p}}^{-1}|\Delta t|\right). \tag{12}$$

ここで K は装置定数である．測定される検出時間差の頻度分布は，(12) 式の理論予測通り，減衰時定数 $\tau_{2\mathrm{p}} = 1.60\,\mathrm{ns}$ で特徴づけられる形をしているのであろうか？ 図 6 に水素ガス圧力 0.40 Pa と 0.02 Pa で測定された二光子の検出時間差の頻度分布を示す[6]．圧力は図 5 と同じである．なお，統計を上げるためと 2 つの圧力における統計をほぼ等しくするために，いくつかの角度 Θ_c において測定された頻度分布を加算した．実線は，測定結果に以下の $F'(\Delta t)$ をフィットした結果である（A' と τ がフィッティングパラメーターである）．

$$F'(\Delta t) = A'\exp(-\tau^{-1}|\Delta t|). \tag{13}$$

フィットにより減衰時定数 τ を実験的に求めようとのもくろみである．この減衰時定数は H(2p) 原子ペア中の各々の H(2p) 原子の見かけの寿命とみなされる．フィットの結果，以下が得られた．

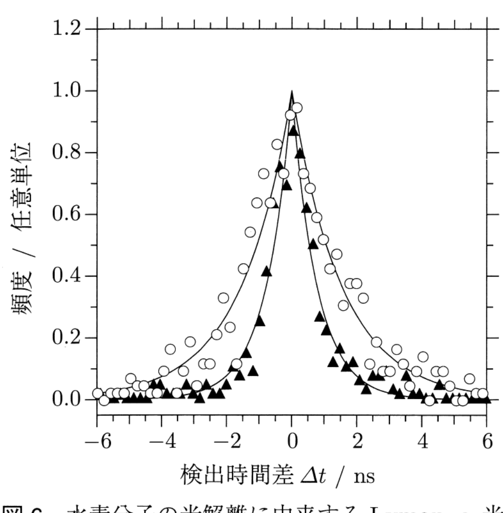


図 6　水素分子の光解離に由来する Lyman–α 光子ペアの検出時間差の頻度分布．○：水素ガス圧力 0.40 Pa における測定結果，▲：水素ガス圧力 0.02 Pa における測定結果．

$\tau = (0.78 \pm 0.04)\,\mathrm{ns}$,
　水素ガス圧力 0.02 Pa にて（▲），　(14)

$\tau = (1.54 \pm 0.08)\,\mathrm{ns}$,
　水素ガス圧力 0.40 Pa にて（○）．　(15)

興味深いことには，各々の H(2p) 原子の見かけの寿命は，水素ガス圧力 0.02 Pa において，単独の H(2p) 原子の寿命（1.60 ns）の約半分となった．一方，0.40 Pa においては，それは単独の H(2p) 原子の寿命にほぼ一致する．先ほど述べたように（4 節の最後の部分），水素ガス圧力 0.02 Pa においては，0.40 Pa におけるよりも，より多くの量子もつれ H(2p) 原子ペア（(8) 式）が生き残っている．よって (8) 式で表される量子もつれ H(2p) 原子ペア中の各々の H(2p) 原子は，単独の H(2p) 原子よりも速く崩壊するかのように振る舞うことが分かる．原子は量子もつれを起こすと，実に不思議な崩壊の様相を見せるのである．

6. おわりに

本稿では，以下の 3 つを紹介した．

i) 水素分子の光解離による量子もつれ H(2p) 原子ペアの生成が予測される．

ii) そのことが，量子もつれ原子ペアが放出する Lyman–α 光子ペアの角度分布測定によって確かめられた．また量子もつれ H(2p) 原子ペアが H_2 分子と反応して，その量子もつれが変化する，あるいは消失する過程は，単独の H(2p/2s) 原子と H_2 分子の反応，すなわち通常の反応，と比べると，100 倍程度も速い（起こりやすい）ことがわかった．

iii) 量子もつれ H(2p) 原子ペア中の各々の H(2p) 原子は単独の H(2p) 原子よりも速く崩壊するかのように振る舞うことがわかった．

もちろん我々の見解に対する反論は存在する[7,8]．しかし，4 節で述べたことであるが，Lyman–α 光子を放出する際の H(2p) 原子間の代表的な距離は 93 μm にも達する．この距離の大きさを考慮する

とiii) は実に不思議である．いまのところ，ii) で述べた量子もつれH(2p) 原子ペア反応の異様な起こりやすさとiii) で述べた見かけの速い崩壊現象の起源は明確ではない．おそらくその起源は共通なのであろう．それをぜひ解明したい．

7. 謝辞

本稿を執筆するにあたり，田邊健彦博士（現産業技術総合研究所），小田切丈博士（東京工業大学），穂坂綱一博士（東京工業大学），宮城晴英博士（現電気通信大学），市村淳博士（宇宙航空研究開発機構）との議論が有益であった．田邊博士には図3–6を作成していただいた．ここに記して感謝したい．また図5と6の実験結果を得ることができたのは，ひとえにPhoton Factoryからの放射光の安定性に負っている．トップアップ運転によるビーム安定性は，いくら賞賛してもし過ぎることはない．

参考文献

1) T. Odagiri, M. Murata, M. Kato, and N. Kouchi, *J. Phys. B* **37**, 3909 (2004).
2) H. Miyagi, A. Ichimura, and N. Kouchi, *J. Phys. B* **40**, 617 (2007).
3) 例えば, 小坂英男, 日本物理学会誌, **65** (1), 2 (2010).
4) M.O. Scully and M.S. Zubairy, 1997, *Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press).
5) T. Tanabe, T. Odagiri, M. Nakano, I.H. Suzuki, and N. Kouchi, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 173002 (2009).
6) T. Tanabe, T. Odagiri, M. Nakano, Y. Kumagai, I.H. Suzuki, M. Kitajima, and N. Kouchi, *Phys. Rev. A* **82**, 040101(R) (2010).
7) Comment on 6): P. Sancho and L. Plaja, *Phys. Rev. A* **83**, 066101 (2011).
8) Reply to 7): T. Tanabe, T. Odagiri, M. Nakano, Y. Kumagai, I.H. Suzuki, M. Kitajima and N. Kouchi, *Phys. Rev. A* **83**, 066102 (2011).

（こうち・のりゆき，東京工業大学大学院理工学研究科）

非局所ゲームと量子疑似テレパシー

F. Buscemi
（訳／市 川　翼）

■ 1. はじめに ■

大辞泉では「テレパシー」の語義を以下のように定めている．

> テレパシー：言語・表情・身振りなどによらずに，その人の心の内容が直接他の人に伝達されること．精神感応．

科学者のチームがこれを検証したいとすれば，テレパシー力があると主張する被験者を２人，別々の部屋に座らせて，（既知の知覚による）通信をできなくすればよい．独立かつランダムに質問をし，２人の答を記録する．これを充分たくさん繰り返せば，**単に統計的に**説明される以上に２人の答が相関しているか検証できよう．このように相関が確認された状況でこそ，科学者は観察中の「テレパシーらしき効果」について，何か語らざるを得なくなる．

実際，このような実験は何度も行われていて[1]，もちろん，テレパシーは一度も観測されていない．しかしながら，量子論では，統計学者が量子論なしの場合に期待する以上の強い相関が，２人の答の間に現れることがある．この物理現象には「量子疑似テレパシー[2]」というあだ名がある．この現象を説明することで，古典論的なマクロな世界と，その基層たる風変りな量子論を区別する最も基礎的な性質を議論するための舞台としたい．

■ 2. テレパシー検証ゲーム：CHSH ゲーム ■

議論をより明確で現実的なものにするにあたって，今述べた実験を被験者２人（アリスとボブと名付けよう）と科学者との**ゲーム**とみなすと都合がよい．２人はテレパシーを立証したいし，レフェリー（科学者）は２人をテストしたい．ゲームのルールは以下の４つである．

1. レフェリーが被験者にし得る質問の集合 $\mathcal{Q}$.
2. 被験者が選び得る回答の集合 $\mathcal{A}$.
3. 勝利条件の集合，いわば質問と正答とのリスト．
4. **無信号**（no-signaling）**条件**：ゲーム開始時から被験者は相互通信不能（テレパシーがなければ！）．ただし，ゲーム開始以前に戦略を立てて，それに合意してよい．

まずアリスとボブに，勝利条件も含めたゲームのルールを知らせ，戦略に合意する時間を与える．被験者２人とレフェリーがゲームを開始することに合意した後，アリスとボブを隔離し，通常の通信を不可能にする（この点については以下のコラムを参照のこと）．レフェリーは質問の集合 $\mathcal{Q}$ から，質問 $s \in \mathcal{Q}$ をアリスに，$t \in \mathcal{Q}$ をボブにそれぞれ選んで独立に尋ねる．回答の集合 $\mathcal{A}$ から，アリスは $x \in \mathcal{A}$ を，ボブは $y \in \mathcal{A}$ を選んで答える．リスト (s, t, x, y) が勝利条件と合致していれば，このラウンドはアリスとボブの勝ち．被験者２人が共に勝つか共に負けるか一蓮托生という意味で，これは**協力**ゲームである．図１で状況を図示した．

２人の目的はできるだけ多く勝つことである．なぜなら，「絶対的なテレパシー」さえあれば，それを使って尋ねられた質問をやりとりし，回答を上手く並べれば常に勝てるはずなのだから．今回のポイントは，**テレパシーがなくても**，平均で何回２人が勝てるかを，レフェリーが統計的推論で計算できることにある．従って，ゲームを何度も繰り返して，２人の勝利する割合をどんなテレパシーも仮定せずに説明できれば，２人の間にテレパシーはないのだ，と言い切れる．

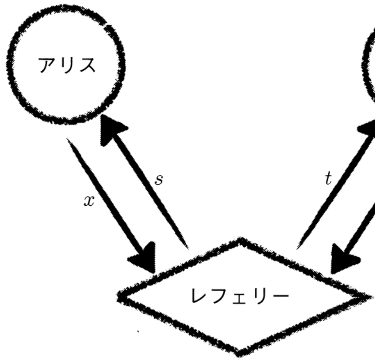


図 1 テレパシー検証ゲーム：s と t は質問の集合 $\mathcal{Q}$ から，x と y は回答の集合 $\mathcal{A}$ から選ばれる．リスト (s,t,x,y) が勝利条件を満たしていればアリスとボブの勝ち．

(s,t) \ (x,y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	○	×	×	○
(0,1)	○	×	×	○
(1,0)	○	×	×	○
(1,1)	×	○	○	×

図 2 CHSH ゲームの勝利条件：レフェリーの質問 $s \in \{0,1\}$ と $t \in \{0,1\}$ が与えらたとき，被験者2人の回答 $x \in \{0,1\}$ と $y \in \{0,1\}$ は勝利条件 $x \oplus y = s \cdot t$ を満たさねばならない．ここで $\oplus$ は2を法とした足し算．例えば，レフェリーがアリスに質問0を，ボブに質問1を尋ねた場合は，上から2番目の，$(0,1)$ とラベルされた行が対応する．この場合，2人が勝つのは正答 $(x,y)=(0,0),(1,1)$ が得られたときに限る．

> **コラム：無信号条件を課すということ．** どうすればレフェリーは，アリスとボブが無信号条件からうまく逃がれた通信などしようがないことを完全に保証できるだろうか？ 純理論的なシナリオとして，ゲーム開始時にアリスとボブが―光のシグナルでも，例えば $\Delta\tau$ 秒位という，ある程度簡単に知覚できるほどの時間がかかるほど―非常に離れた地点に連れていかれると想像するのが分かりやすい．このとき，光速より速く伝わる情報がないと仮定すると，アリスとボブが同時に質問を受け，2人が $\Delta\tau$ 秒以内に答えれば，無信号条件が満足されているとレフェリーは言いきれる．このセットアップは，**超光速通信**として，テレパシーのより定量的な定義を暗に与えているといえる．

この種の「テレパシー検証」ゲームは**非局所ゲーム**に属する．この種のゲームで最もシンプルかつ有名なのは，「CHSH ゲーム」と呼ばれるゲームであろうが，これは Clauser，Horne，Shimony，Holt（CHSH）が，相関した量子系の性質の検証のために1969年に提案した実験[3]を，ゲーム理論の言葉で再構成したものである．ルールも至ってシンプルで，$\mathcal{Q}$ も $\mathcal{A}$ も2つの元，例えば0と1，だけからなり，$x \oplus y = s \cdot t$ を満たす回答 x, y を選べば2人が勝つ（ここで $\oplus$ は2を法とした足し算で，$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ と $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ で定義される．図2を参照されたい）．以下では，CHSH ゲームで最大限勝つために2人がどんな戦略を練られるか，検討することにしよう．

3. プレイヤーの戦略

3.1 決定論的な戦略

はじめに，アリスとボブの回答がそれぞれ関数 $x(s)$ と $y(t)$ で記述される場合を考えよう（これはアリスは常に質問0には $x(0)$ で，質問1には $x(1)$ で回答するのに対し，ボブは常に質問0には $y(0)$ で，質問1には $y(1)$ で回答することを意味する．質問によってプレイヤーの回答が完全に**決まる**ので，この戦略を**決定論的**という）．アリスとボブが常に勝利する，すなわち常に正答する必要十分条件は，関数 $x(s)$ と $y(t)$ が勝利条件 $x(s) \oplus y(t) = s \cdot t$ を満たすこと，つまり，以下の4つの条件

$$
\begin{aligned}
&x(0) \oplus y(0) = 0,\\
&x(0) \oplus y(1) = 0,\\
&x(1) \oplus y(0) = 0,\\
&x(1) \oplus y(1) = 1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

がすべて成立することである．（2を法として）左辺をすべて足すと

$$
\begin{aligned}
&x(0) \oplus y(0) \oplus x(0) \oplus y(1)\\
&\qquad \oplus x(1) \oplus y(0) \oplus x(1) \oplus y(1)\\
&= x(0) \oplus x(0) \oplus x(1) \oplus x(1)\\
&\qquad \oplus y(0) \oplus y(0) \oplus y(1) \oplus y(1)\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

一方，右辺をすべて足すと

$$
0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1. \tag{3}
$$

これは (1) の4つの条件はすべて同時には成立しない

ことを意味している．というのも，もし成立したとすれば $0=1$ となるから．

上記の議論が示唆するのは，CHSH ゲームでは，決定論的な戦略で常に勝てるわけではないということである．それではアリスとボブの勝利頻度はどの程度だろうか？ すべての質問がランダムに，同じ頻度でなされるとすれば，全部で 4 種類の質問の組合せ（$s=0$ かつ $t=0$，$s=0$ かつ $t=1$，$s=1$ かつ $t=0$，$s=1$ かつ $t=1$）があるので，そのうちの少なくとも一つに対しては誤答すると予想できる．つまり**最大**で75%の割合で勝利する．事実，75%の割合で勝てる決定論的な戦略は簡単に見付かる．例えば，ゲーム開始の前に 2 人が「質問の種類に関わらず，常に 0 と答える」という戦略に合意するとする．この単純な戦略で，2 人が平均で全ラウンドの 75%で勝利できることが保証される．

3.2 ランダムな相関

決定論的な戦略を採用することで，アリスとボブが達成できる最大の勝率が 75%ということを示した．勝率を増やすためにアリスとボブができることは他にないだろうか？ ここで思い出したいのは，2 人は**どんな**戦略にも合意してよいし，ゲーム開始前に**どんな**情報も共有してよいということである．そしてゲーム中は，事前に用意したどんな物的手段も，（無信号条件の結果として）どんな通信も許さないものであれば，用いてよい．

様々なことができるように見えるが，2 人が使える余分な自由度は無信号条件により実際にはかなり制限されているので，最終的には，2 つの「同期した」物理系を共有して，2 人の間に付加的な相関を追加するという状況に常に帰着される．例えば，（同時に質問を受けると仮定してだが，）アリスとボブは事前に時計を同期させておき，質問された時刻にも依存して回答を選べるだろう．同期という意味ではあまり文字通りではない例として，アリスとボブが 2 つのサイコロに細工をしておき，投げれば必ず同じ目が出て相関するようにしておく．出目の間の相関が回答の間の相関を増やすことを期待して，2 人は回答の前にこのサイコロを投げ，出目と質問の種類の両方に依存して回答を選ぶこともできる．図 3 にこの状況を示した．

以上のようなアレンジをすることで，アリスとボブは余分な相関を共有できる．ここでの相関は無信号条件を満たしているので，メッセージの伝達には使えず（同期した時計の例を考えよ），ゲームのルールには抵

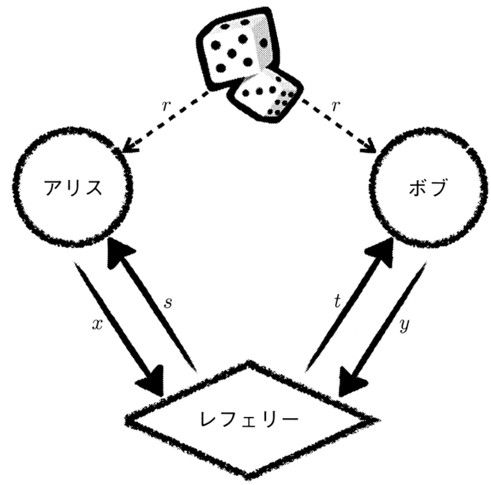


図 3　確率変数（この場合では細工されたサイコロのペア）を共有して行われる CHSH ゲーム．この場合でもアリスとボブの勝率はせいぜい 75%で，決定論的な戦略の場合と同じ．

触しない．だが，このような余分な相関は本当に役に立つのだろうか？ 実際，余分なランダム相関の共有が**役に立たない**ことを理解するのはそう難しくない．

明確さのため，サイコロ投げの例に集中することにしよう．同じ議論が他のランダム相関にも適用できることに注意．出目が r のとき，アリスとボブができることは，質問 s と t，および出目 r の両者に依存する関数 $x(s,r)$ と $y(t,r)$ に従って答えを選ぶことである．これは出目 r ごとに，例えば $x_r(s) \equiv x(s,r)$ と $y_r(t) \equiv y(t,r)$ という**決定論的な**戦略を対応付けているともいえる．従って，各出目 r に対して，アリスとボブは平均で 75%以上は勝つことができない．これがすべての出目 r に対して成り立つので，明らかにこのようなランダムな戦略は，完全に決定論的な戦略よりも平均的な勝利頻度が増えることはない．ゆえに，**ランダムな相関は役に立たない**のである．

3.3 量子戦略

ここまで，ランダムな相関の有無によらず，平均ではアリスとボブは 75%以上は勝てないことを主張した．一見すると，勝利の妨げとなっているのは，(1) で表される勝利条件をすべて同時には満たせないことにありそうである．これは，4 つの可能性 $(s,t) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$ のうち少なくとも一つではアリスとボブは正答が得られず，勝利頻度が 3/4 となることを意味している．(1) から (3) までで用いた考え方は直感的には自明に見える．それゆえ，量子論ではこの議論が無効なのだとい

うことは，科学者にとっては最も驚くべき発見だった．それでは，今までの議論で破綻するポイントは，**厳密**には一体どこにあるのだろうか？

そのポイントは

> (1) の 4 つの数式はすべて同時には満たされない．**そしてそれゆえに**アリスとボブは，4 通りの質問のペアのうち，少なくとも一つでは正答が得られず，すなわち誤答せざるを得ない

といったとき，非常に強い仮定を暗においていることにある．事実，「真」か「偽」というはっきりした真理値を (1) の 4 つの式すべてに，**同時に**割り当てられると我々は仮定している．専門用語では，2 つ以上の数式にはっきりとした真理値を同時に割り付けることができるとき，それらが同じ**論理的文脈**にあるという．従って，(1) の 4 つの式がすべて同じ文脈にあると仮定するだけで，先ほどの議論が正しいものとなる．ゆえに，**文脈非依存性**と呼ばれるこの仮定こそがアリスとボブの勝率を 3/4 より高くさせないのである．

では，文脈非依存性はどの程度理に適った仮定なのだろうか？ 通常の論理的思考や，そこからくる自然な直感は，実際のところ文脈非依存性に基いている．すなわち，文脈が唯一つだけあって，そこでは適格な表現は真か偽のいずれかであること（論理の「二値」性）を当然と思っている．言いかえれば，どの適格な表現も同じ論理的文脈に属すると思っている．しかし，文脈非依存性の仮定が常に正当化できるとは限らない．事実，量子論は二値性を満足せず，論理的に両立しない異なった文脈が存在する[4]．そこで，アリスとボブが量子論の法則に従って行動し，レフェリーの質問 (s,t) に依存して**異なった文脈を選ぶ**という状況が考えられる（詳細については第 4.2 節をご覧になられたい）．この場合，(1) から (3) までの議論が妥当ではなくなるので，アリスとボブは，原理的には 75%より高い勝利頻度を達成できるだろう．第 5 節では，CHSH ゲームのルールと矛盾せずに，単に相関した量子系のペアを使うだけで，アリスとボブが 85%程度の勝率を得る方法を示す．

4. 量子論の基本事項

ここで議論を中断して，量子論の基本概念をいくつか導入する必要がある．以下で述べる規則は，数学の公理のようなものと思っていただきたい．また，公理の物理的解釈は本記事の埒外とする．

4.1 量子状態

まず始めに，各量子系に対して，**次元**と呼ばれる自然数 $d \in \mathbb{N}$ を付与できることを述べておこう．このとき，d 次元の量子系の物理的な状態それぞれに対して，単位長さの d 次元複素ベクトルを対応づける．逆もまた然りで，単位長さの d 次元複素ベクトルそれぞれが，d 次元量子系の物理的状態を表現する．例えば，2 次元量子系の物理的状態（光子の偏光の状態，電子のスピンの状態，二準位原子のエネルギーの状態）はすべて，$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ なる複素数 $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ を用いたベクトル

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

で表現される．複素数 α,β は，測定可能な物理量の大きさというように，直接的な物理的解釈をせず，抽象的なパラメータとみなす．

量子論のさらなる規則として，例えば電子の**ペア**のスピンの状態など，合成系の物理的状態をどう表現するかがある．ある電子のスピンの状態が ψ で，もう一つの電子のスピンの状態が

$$\psi' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

であるとしよう．このように個々の電子のスピンの状態が確定しているときの**合成量子系**としての 2 つの電子の結合状態（joint state）を $\psi \otimes \psi'$ という記号で表し，

$$\psi \otimes \psi' := \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \beta\alpha' \\ \beta\beta' \end{pmatrix} \tag{4}$$

で定める．しかしながら，量子論では合成量子系の状態はもっと多彩である．非常に単純化していうと，量子論によれば，結合した 2 つの d 次元量子系は，d^2 次元量子系一つと**数学的には等価**である．従って，例えば電子のペア一個のスピンのあり得る状態すべては，$|\gamma|^2+|\delta|^2+|\epsilon|^2+|\eta|^2=1$ なる複素数 $\gamma,\delta,\epsilon,\eta \in \mathbb{C}$ を用いた 4 次元ベクトル

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \eta \end{pmatrix} \tag{5}$$

と一致する．Ψ には，電子一個のスピンの状態 ψ と ψ' としてどんなものを用いても $\psi \otimes \psi'$ の形に書き下せないものさえある．

4.2 オブザーバブルと量子測定

量子状態を数学的にどのように表示するかが分かれば，次に必要なのは，例えば電子のスピンの**ある与えられた方向に関する**値のような，測定されるべき物理量をどのように表示するかである．d 次元量子系に対して，そのような量は**オブザーバブル**と呼ばれ，d 行 d 列の自己共役な行列に対応する．逆に，2 次元量子系に対して，$m, n, o, p \in \mathbb{R}$ と $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ を用いた行列

$$A = \begin{pmatrix} m & o + \mathrm{i}p \\ o - \mathrm{i}p & n \end{pmatrix} \tag{6}$$

はすべてオブザーバブルとなる．行列 A は自己共役なので，線型代数の基本的な定理によれば，**固有値**と呼ばれる実数 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ と**固有状態**と呼ばれる単位長さの互いに直交する複素ベクトル（すなわち量子論における物理的な状態）ψ_1, ψ_2 が存在し，$A\psi_1 = a_1\psi_1$ と $A\psi_2 = a_2\psi_2$ が成り立つ．

今，2 次元量子系の状態 ψ に対してオブザーバブル A を測定したいとしよう．量子論では以下の規則がある：

1. A の任意の測定に対し，その結果は a_1 か a_2．
2. 測定結果 a_i（$i = 1, 2$）を得る確率は $p_i = |(\psi, \psi_i)|^2$ に等しい．ここで (ψ, ψ_i) は複素（エルミート）内積を表す．

ここで注意すべきは，量子論は一般に測定結果そのものではなく，測定結果を得る確率のみを予言できるという点である．言いかえると，測定結果は系の状態の関数として一意的に決まるものではなく，古典物理とは非常に対照的である．

さらに今，2 次元量子系のペアの状態 Ψ に対して，オブザーバブル A を一方の系で，オブザーバブル A'（固有値は a'_1 と a'_2 で，対応する固有状態は ψ'_1 と ψ'_2）を他方の系で測定したいとしよう．このとき以下の規則がある：

1. 一方の系に対する A の，他方の系に対する A' の任意の測定に対し，その結果は，ある $i, j \in \{1, 2\}$ で決まるペア (a_i, a'_j) となる．
2. $i, j \in \{1, 2\}$ で決まる測定結果のペア (a_i, a'_j) を得る確率は $p_{i,j} = |(\Psi, \psi_i \otimes \psi'_j)|^2$ に等しい．

4.3 オブザーバブルが決める文脈

量子論が予言できるのは測定結果そのものではなく，測定結果を得る確率のみではある．ただ，それでもやはり

P1 ＝「状態 ψ に対してオブザーバブル A を測定すると結果は a である」

という形式のどんな命題も，**はっきりした真理値を持つ**．つまり，（ある確率 p で）真か（確率 $1-p$ で）偽かのいずれかである．

2 つ以上のオブザーバブルを考慮に入れると，議論はより込み入ってくる．例えば，

P2 ＝「状態 ψ に対してオブザーバブル B を測定すると結果は b である」

というような，別の命題を考えよう．P1 と P2 が両方同時に，はっきりした真理値を持つことは可能だろうか？ 2 つのオブザーバブル A と B が共通の固有状態を持たない場合，命題 P1 と P2 は相異なった互いに両立しない論理的な文脈に属することが分かっている（詳細は文献 5) を参照されたい）．従って，そのような場合，これらにははっきりとした真理値を同時に割り当てることはできない．これが示唆することは，以下のようなことである．オブザーバブル A と B が共通の固有状態を持たない場合はいつでも，例えば

「状態 ψ に対してオブザーバブル A を測定すると結果は a であり，かつ，状態 ψ に対してオブザーバブル B を測定すると結果は b である」

というような連言に対しては，はっきりとした真理値を割り当てることはできず，「真」とも「偽」ともいえない．

■ 5. 量子戦略の構成 ■

量子論では，レフェリーの質問に応じて異なった文脈を選ぶことで (1) から (3) までの議論から逃がれ，原理的には 75%以上の勝率を得る可能性があることを注意した．一方，前節では，固有状態を共有しないオブザーバブルの測定を考えたとき，相異なった互いに両立しない論理的な文脈が，量子論においていかにして自然に発生するかを学んだ．以下ではこの事実を CHSH ゲームでいかにして有効利用するかを見ていこう．

まず第一に，CHSH ゲームでは無信号条件により，

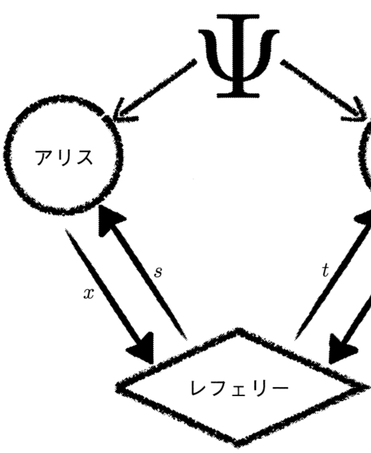


図 4　状態 Ψ にある量子系を共有して行われる CHSH ゲーム．この場合，レフェリーの質問に応じて異なった論理的文脈を選ぶことにより，アリスとボブはおおよそ 85%の割合で勝利でき，古典的な戦略で達成可能な勝利頻度を上回ることができる．

どんな量子戦略も以下の形式に制限される：

1. アリスとボブは相関した 2 つの量子系を共有する（後でゲームの最中に使用する）．
2. 尋ねられた質問に応じて，アリスとボブは独立に（つまり通信をせずに）自分の量子系で測定するオブザーバブルを一つ選び，回答を決める．

より具体的にいうと，ゲーム開始前にアリスとボブは研究室で落ち合い，2 つの電子を合成系のスピンの状態 Ψ に準備し，つまりは (5) の複素数 $\gamma, \delta, \epsilon, \eta$ の値を選び，それぞれ 1 個の電子をキープする．さらに，2 人は 4 つのオブザーバブル，つまりは (6) の行列 4 つの選び方についての合意をしておく．そのうちの 2 つはアリスの電子に対するオブザーバブル A_0 と A_1 で，残りの 2 つはボブの電子に対するオブザーバブル B_0 と B_1 である．質問 $(s,t) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$ を尋ねられたときに，アリスはオブザーバブル A_s の値を，ボブはオブザーバブル B_t の値を，各自の電子に対して測定し，その観測結果に応じて回答を行うとする．

状態 Ψ と 4 つのオブザーバブル A_0, A_1, B_0, B_1 の具体形を与え，勝利頻度の計算を順序立てて行うのは付録に回すことにして，本節ではいくつか考察を行うに留める．まず第一に，アリスとボブが量子測定の結果に応じて回答を選んでいることを強調しておこう．一般に量子測定の結果はランダムなので，尋ねられた質問の関数としてプレイヤーの回答を算出できないという意味で，量子戦略は決定論的ではない．この観点からは，量子戦略は，古典的な決定論的戦略よりもむしろ，古典的なランダム戦略に似ているように見える．しかしながら，量子的な戦略を，ランダムな相関の使用をも含む古典的な戦略すべてと明確に区別する，2 つの基礎的な側面がある．

まず第一に，古典系に比べて，量子系では非常にエキゾチックな相関が発生し得る．例えば，(5) で表される 2 つの電子のスピンの状態 Ψ が $\psi \otimes \psi'$ と書けないとき，結合状態 Ψ は**もつれている**（entangled）という．もつれた状態は量子論においてのみ見付かるもので，その古典論的な対応物はない．量子もつれ状態の性質は，たとえ数学的に上手く特徴付けができ，実験的に検証されようとも，我々の古典論的直感では把握しづらい．しかもアインシュタインが，物理的実在を記述する完全な理論として量子論を解釈することへの反論のために量子もつれ状態を使用した[6]という点では，逆説的にすら思える．もつれた量子状態の性質の説明は本稿の射程外とし，ここでは単に，量子もつれ状態は**相異なるたくさんの文脈の中で同時に**相関でき，この点では，唯一つの文脈しか存在しない，相関した古典系とは対照的であると述べておきたい．

量子戦略の奇妙な性質の 2 つ目は，4 つのオブザーバブル A_0, A_1, B_0, B_1 を，固有状態がすべて異なるように選べることである．そう選ぶと，アリスとボブはレフェリーから受けとった質問のペア (s,t) ごとに，異なった文脈を実際に定めていることになる．このことも，ランダムな相関の有無に関わらず，常に唯一つの文脈しかない古典的な戦略とは非常に対照的である．

ここまでで，量子もつれと文脈依存性という，量子論の 2 つの特徴を簡単に説明した．この 2 つの特徴を使って，アリスとボブは厳密に $\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) \approx 0.85$ の割合で勝てる量子戦略を構成し，古典的な戦略で以前に示した限界である 3/4 を打ち破ることができる．詳細は付録を参照していただきたい[7]．

6. まとめ

2 人のプレイヤーがテレパシー検証ゲームを行うという仮構の例を使って，量子力学的な系の振る舞いと，我々の古典論的な直感とに大幅なずれを引き起こす 2 つの基礎的な特徴について述べた．一つは量子論の**文脈依存性**であり，固有状態を共有しないオブザーバブルを測定したときに，論理的に両立しない文脈が発生

するということであった．もう一つは**量子もつれ**であり，2 つ以上の量子系が相異なった文脈で同時に相関を示し得ることになる．どの命題も同じ文脈の中で定式化されてしまう古典的なマクロな世界では，どちらの特徴も存在しない．

謝辞

量子論の文脈依存性に関する啓発的な議論と説明をして頂いた，小澤正直教授に感謝致します．

注と参考文献

1) ESP カードを用いたものや，感覚遮断した，いわゆるガンツフェルト実験など．

2) G. Brassard, R. Cleve, A. Tapp, *Physical Review Letters* **83**, 1874–1877 (1999); G. Brassard, A. Broadbent, A. Tapp, Proceedings of the 8th International Workshop on Algorithms and Data Structures, *Lecture Notes in Computer Science* **2748**, 1–11 (2003); G. Brassard, A. Broadbent, A. Tapp, *Quantum Information and Computation* **5**, no.7, 538–550 (2005).

3) J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Physical Review Letters* **23**, 880–884 (1969).

4) S. Kochen and E.P. Specker, *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59–87 (1967).

5) M. Ozawa, *Foundations of Physics* **41**, 592–607 (2011).

6) A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Reviews* **47**, 777–780 (1935). 解説として，D. Lindley, *Physical Review Focus* **16**, 10 (2005).

7) 付録で導出する量子戦略は，CHSH ゲームでの他のどんな量子戦略もこの戦略より高い勝利頻度を与えないという意味で，最適であることが知られている．以下の文献で最適性が示された．B.S. Cirel'son, *Letters in Mathematical Physics* **4**, 93–100 (1980).

（フランチェスコ・ブシェーミ，名古屋大学高等研究院）
（いちかわ・つばさ，近畿大学大学院総合理工学研究科）

■ A. 付録 ■

本付録では CHSH ゲームでおおよそ 85%程度勝利できる量子戦略をあらわに導き出してみよう．

A.1 共有すべき量子系

アリスとボブは，相関した二準位量子系のペアを，合成系の状態

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{A1}$$

に準備する．合成系の状態がもつれていようとも，アリスが一方の量子系をキープしておき，ボブがもう一方をキープしておけるという意味で，2 つの量子系を共有できることに注意．

A.2 測定すべきオブザーバブル

レフェリーの質問 $s \in \{0,1\}$ に応じて，アリスは

$$A_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

か

$$A_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

を測定する．A_0 と A_1 の両方とも，固有値が $a_1 = 1$ と $a_2 = -1$ であることに注意．このとき，アリスは測定結果が 1 なら $x = 1$ と答え，-1 なら $x = 0$ と答える．

一方，レフェリーの質問 $t \in \{0,1\}$ に応じて，ボブは

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

か

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

を測定する．この場合も，B_0 と B_1 の両方とも固有値は $b_1 = 1$ と $b_2 = -1$．このとき，ボブは測定結果が 1 なら $y = 1$ と答え，-1 なら $y = 0$ と答える．

A.3 勝利頻度の計算

まず第一に，オブザーバブル A_0, A_1, B_0, B_1 はすべて同じ固有値 1 と -1 を持つが，固有状態はすべて異なることに注意しよう．

- A_0 の場合：固有値 $a_1 = 1$ と $a_2 = -1$ に対し，

$$\psi_1^{A_0} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \psi_2^{A_0} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

なる固有状態がそれぞれ対応．

- A_1 の場合：固有値 $a_1 = 1$ と $a_2 = -1$ に対し，

$$\psi_1^{A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \psi_2^{A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

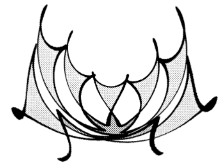
なる固有状態がそれぞれ対応．

- B_0 の場合：固有値 $b_1=1$ と $b_2=-1$ に対し，固有状態として
$$\psi_1^{B_0}=\frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\1\end{pmatrix}$$
と
$$\psi_2^{B_0}=\frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\-1\end{pmatrix}$$
がそれぞれ対応．
- B_1 の場合：固有値 $b_1=1$ と $b_2=-1$ に対し，固有状態として
$$\psi_1^{B_1}=\frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\-1\end{pmatrix}$$
と
$$\psi_2^{B_1}=\frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$$
がそれぞれ対応．

レフェリーが質問 $(0,0)$ を尋ねたとき，アリスとボブが勝つ確率を計算しよう（他の場合も勝利頻度が同じになることを，興味ある読者は確かめてみられたい）．レフェリーの質問が $(0,0)$ のとき，図 2 の勝利条件によれば，アリスとボブが勝つのは回答が一致したときで，しかもそのときに限る．これはアリスとボブが勝つのはそれぞれが A_0 と B_0 を測定したときに，同一の測定結果を得ることと同値であることを意味する．4.2 節の終わりで述べたことに従って同一の測定結果を得る確率を計算するのだが，これは測定結果が a_1 かつ b_1 である確率と，a_2 かつ b_2 である確率との和に等しい．

a_1 と b_1 を得る確率は，Ψ と $\psi_1^{A_0}\otimes\psi_1^{B_0}$ の内積の絶対値の自乗で与えられる．ここで Ψ は (A1) で与えられ，
$$\psi_1^{A_0}\otimes\psi_1^{B_0}=\frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$
である．ベクトル $\psi_1^{A_0}\otimes\psi_1^{B_0}$ をあらわに書くのに (4) のルールを使った．直接計算で，上記の内積の絶対値の自乗が
$$\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4(2+\sqrt{2})} \tag{A2}$$
となることが分かる．同様の議論により，a_2 と b_2 を得る確率は，Ψ と $\psi_2^{A_0}\otimes\psi_2^{B_0}$ の内積の絶対値の自乗で与えられ，これは
$$\frac{1}{4(2-\sqrt{2})} \tag{A3}$$
に等しい．最後に，(A2) と (A3) を足し，本文で述べた通り
$$\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\approx 0.85$$
を得る．

新時代の量子力学教育



上田　正仁

物理学は物理と数学の両方の学習が要求される厳しい学問である．なかでも量子力学はとりわけハードルが高く感じられる科目ではないだろうか．実際，不確定性関係 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ の意味を正しく説明できる学生はほとんどいない（誤った答えの例：位置と運動量を同時に測定すると，測定精度の積の下限は $\hbar/2$ で与えられる）．量子力学がトランジスターをはじめとする数多くの文明の利器の基礎を与えているだけではなく，古典力学では不可能な量子情報処理を可能にするデバイス原理となっている現状を考えると，計算技術の習得に重きを置く旧来の量子力学の教育では不十分であると言わざるを得ない．

量子力学には，粒子–波動二重性，エンタングルメント，非局所性，測定の反作用と波束の収縮など古典力学には存在しない特有の性質がある．通常の量子力学の授業ではこれらを深く掘り下げることはせずに，計算のテクニックを説明することに重きが置かれる．学生のほうは，二重性の本質は「波であり粒子である」というわけのわからないものであると「理解」して，計算力を磨くことに専心するようになる．しかし，光子や電子，原子を１個のレベルで人工制御することが要求される今日では測定過程の詳細に踏み込まずしてこれらの課題を解決することはできない．

実は量子力学の基礎やその不思議な性質に対する学生の関心は非常に高い．それゆえ，量子力学の講義の入り口のところで，それらについてしっかりと説明することは，学生が量子力学を好きになる好機である．このことは，私自身も授業を通じてその効果を確かめている．逆に，「習うより慣れろ」式の講義をすると量子力学はあいまいでわかりにくいものと印象され敬遠される．

授業では，量子力学の理論体系とその予言する結果に関するあいまいさがほとんどないことを明らかにすることが重要である．二重性然り，不確定性関係然り，非局所相関然りである．観測問題では，波束の収縮がいつ起こるかという点に任意性があるが（いわゆるフォン・ノイマンチェイン），それが観測結果に影響を与えないように理論ができているという点がポイントである．アインシュタイン–ド・ブロイの関係式や素粒子が分割できない等の少数の実験事実から出発して，不確定性関係など量子論のほとんどすべての基本事項が体系的に導けることを示し，不確定性原理が実は定理であることを指摘する．非局所性などの直感に反する事実を説明するときは，それを実証した実験を紹介することが効果的である．百聞は一見に如かずである．

一見不思議に思える現象も様々な実例を説明されると，通常は不思議でなくなるものである．しかし，量子力学では，予言の正しさを実験で確か

めることにより不思議さがより一層深まる．量子力学に内在する解釈を拒絶した深い真理が垣間見えるようにすら思われる．量子情報分野の発展により，波束の収縮や非局所性という量子論の不思議な性質を単に受け入れるだけではなく，それらを古典論に存在しないデバイス原理として積極的に応用しようというパラダイムシフトが起きている．このような魅力を学生に実感させることができれば量子力学の授業は成功といえよう．

私は上に記したような量子力学の授業を広島大学，東京工業大学，および，東京大学において過去15年あまり実践してきた．また，集中講義においても量子力学の基礎の説明に力点を置いた授業を行ってきて，そのような講義により学生の好奇心が刺激されることを実感してきた（講義の感想についてはウェブで公開している http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~ueda/lecture.html）．最近は，これらの実践をまとめた教科書（『現代量子物理学—基礎と応用』，培風館）を用いており，授業における質疑応答を改定に活用させていただいている．量子力学の入門としては最初の2章までで十分である．授業ではこれらの題材に加えて，学生のレベルに合わせた演習問題を配布して実際に手を動かすことにより理解を深めてもらうようにしている．大学院のコースでは，授業の前半でやはり1–2章の基礎の復習を行い，3–7章から学生の興味に合わせた題材を適宜ピックアップしている．ここでは様々な題材を考察することにより量子力学の理解を深め，かつ，その不思議さや魅力を実感してもらうことが目的である．授業においては次の3点に留意して学生から質問を誘発するような対話型の授業を展開することが効果的である．まず，量子論の不思議な性質が理論の論理的帰結として導かれることを説明する．次に，その予言が我々の日常経験に基づく直感に反することを指摘する．にも関わらず，量子力学の予言が正しいことを実験事実を通じて納得してもらう．

ボーアは，量子力学の数学はその統計性に関する知識を与えるアルゴリズムであると言った．これが量子論の本質について誰よりも深く考え続けた碩学が晩年に到達した結論である．私は，ゲルマンによる次の言葉が量子力学の特徴を最も端的に表現していると思う．

Quantum mechanics, that mysterious, confusing discipline, which none of us really understands but which we know how to use.

結局，ここで表現されている量子力学の何たるかを実験事実に即してバランスよく伝えることが新時代にふさわしい量子力学教育であると思われる．

（うえだ・まさひと，東京大学大学院理学系研究科）

リレー連載

数学的な感覚の探求 思考法の源を探る 第3回

すいの体積を小学生に教える

岡部　恒治

1. はじめに

「数学的な感覚の探求―思考法の源を探る」というシリーズのコンセプトからみると，この題名は,「ちょっと」と思う方がいらっしゃるでしょう．どっちかというと,「数学教育」の内容ですし，数学教育といったら,「生きる力」,「関心・意欲・態度の評価」などの抽象的な（どうとでも取れて，言い訳しやすい）スローガンの羅列を予想するかもしれません．

しかし，本来，数学者が数学教育に関与するときには，数学の本質に迫る方向から教育に提言をしていくべきものです（実は,『分数ができない大学生』[1)]は，看過できない状況なので出したものです．これより，小中高への出前授業のほうがよっぽど楽しい)．その方面から，思考法の形成過程を述べようと思います．

2. 公務員試験の問題集から

この問題に取り組んだきっかけは，公務員試験のための問題集を出している最大手の出版社からの依頼でした．そこで発想塾という通信講座を担当しているときに，次の問題がありました．

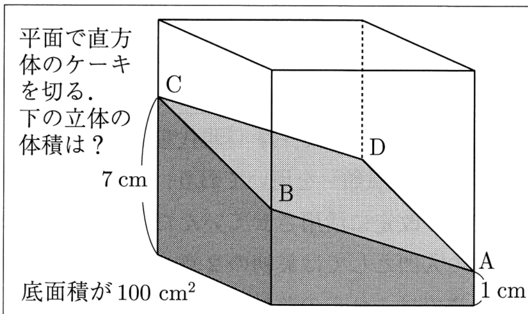


図 1

出ていた参考書の解答は，立体を 3 つに切って計算し，3 つのうち一つは斜三角柱でした．賢明なる読者諸氏は，ただちに図のように，A より上の部分が 1 cm となるように切ればよいと気付くでしょう．切ってできる上のほうも，下の立体と合同だとわかります．

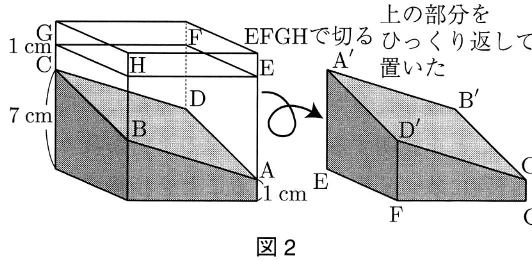


図 2

このことから，体積は $100 \times 8/2 = 400\,\mathrm{cm}^3$ です．

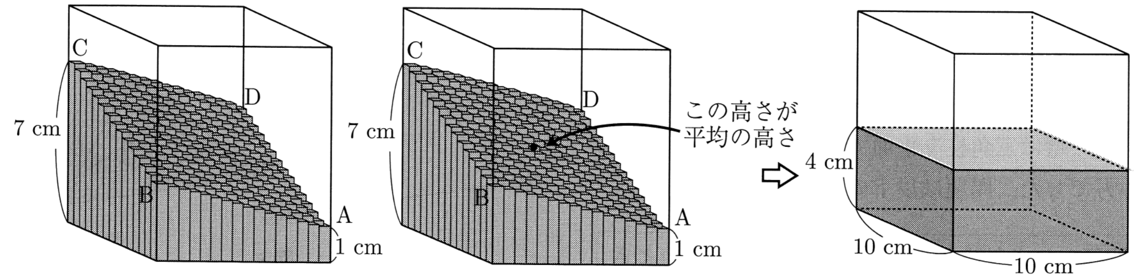


図 3

ずいぶんラクな解答になったと思っていたら，純文系の受講生から，「この解答の合同という言葉自体がわからないので，丁寧に教えてほしい」という要望が届きました．

こういうとき，私は最初の解答を詳しく説明するほかに，別の説明はないかと考えることにしています．そこで思いついたのが，「ワリバシ空間」です．何のことはない，積分の区分求積法の発想法です．

図 3 のようにワリバシのような細いたくさんの直方体で立体を近似します．図では，少しデコボコしていますが，どんどんワリバシを細くしていけば，問題図と同じようになることは，理解してもらえます．

そして，真ん中のハシ（真ん中のハシ？）に合わせて長いハシを切り，その切った先を真ん中に関しての対称点のハシにつなぐと，すべて同じ長さになってしまいます．つまり，この立体は直方体になります．その高さは，真ん中のハシの高さです．この高さが平均の高さということです．これは，1 cm と 7 cm の平均で 4 cm となります．

このワリバシ空間は，苦し紛れに思いついたものですが，これが後でいろんなことに使えることがわかりました．

3. すいの体積に

それから数年経って，学習指導要領の改訂で，「数学基礎」という新科目ができました．最初の報道では，中教審で「数学が苦手な生徒には数 I は重過ぎる．その単位数を減らし，数学の歴史でお茶を濁してもよい」などと議論されたというではありませんか．当然，私も含め多くの数学関係者は憤慨していました．ところが，何の因果か私が協力者になって，その科目の責任者になってしまったのです．

考えてみれば，これは「お茶を濁す」から「数学の面白さを感じる」というように，科目を変えるチャンスでもあるわけです．

そして，その流れで，数学基礎の教科書を書くことにもなってしまいました．

このときに，苦心したのが，「すいの体積の公式」の説明です．

当時，教育課程審議会の委員だったマスコミで有名な A 氏は，朝日新聞のインタビューで，「わからなくても公式を信じ込ませているだけ」，「すいの体積は，積分をやらないと理解できない」などと言ったのです．それで，一時期，「『すいの体積の公式』は中学校から高校に移る（体積の積分は数 III でしたから高 3 の後期か）」などと，教育関係者に衝撃が走りました．そんなことを言っていたら，教育体系がメチャメチャになります．だいたい，多くの皆さんが知っている $\lim_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$ だって，高校では厳密な証明ではないのですから．

また，すいの体積によって，球の体積を説明したり，$\int x^2 dx$ を直観的に理解することだって可能なのです（『数学はこんなに面白い』[2] にも書きました）．

4. 三角柱を平面で切ったときの体積

私自身は，かなり以前からカバリエリの原理を用いて説明していましたし，それで，「積分までいかないと説明できない」ということに反論するには

十分でした．でも，ちょっと腹が立ったので，「この証明を小学生にもわかるように書き直そう」というプロジェクトをスタートさせました．そこで，最初の壁は三角柱を平面で切ったときの面積の求め方でした．問題は以下のように記述されます．

問題　三角柱を平面アイウで切った．このときできた立体の体積を求めなさい．各頂点の高さは，図のように 5 cm，32 cm，14 cm とし，底面の面積は 30 cm^2 とします．

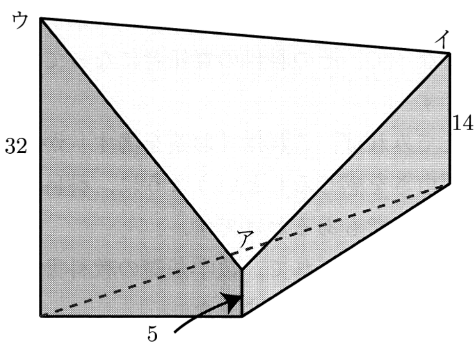


図 4

この問題が解ければ，すいの体積は簡単に求められることは後で説明します．

状況は，直方体のときとそんなに変わらないようにも見えました．当然，**類推を始めます**．「ワリバシ空間を考えて，平均の高さを求めればよいじゃないか」と思いました．パップス・ギュルダンの公式を知っていれば，「重心の高さが平均の高さ（そして，それが 3 頂点の高さの平均だ！）」ということが推測されます．

しかし，「どうして重心の高さが平均か？」と聞かれると，なかなか中学生に説明できません．

数学基礎の教科書の教師用指導書には，以下のような説明を書いた覚えがあります（私は監修者でしたが，そのまま採用されたかどうかは不明です）．これでも，当時としては，頭を絞りぬいて書いたものです．

三角形の頂点の高さの平均が重心 G の高さになることは，比やベクトルを用いてで示すことができます．このことを用いるのです．

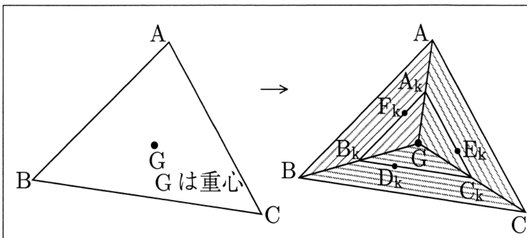


図 5

底面の三角形の重心を G として，3 つの線分 GA, GB, GC を細かく等分して，それぞれの三角形で考える（同心三角形！）．たとえば，$\triangle A_kB_kC_k$ においても，重心は G であって，またその辺上の同じ比に対応する 3 点（たとえば図の $D_kE_kF_k$）の作る三角形の重心も G となる．よって，この三角形 $\triangle A_kB_kC_k$ の辺上では，平均の高さが G の高さとなる．

それぞれの同心三角形の平均の高さが G の高さなので，この三角形全体の平均の高さは G の高さと一致する．

今読んでも，結構面倒な推論です．これでは，中学生に説明するなんて，とんでもないことです（この証明のカギの「重心」自体が中学校から削られました）．

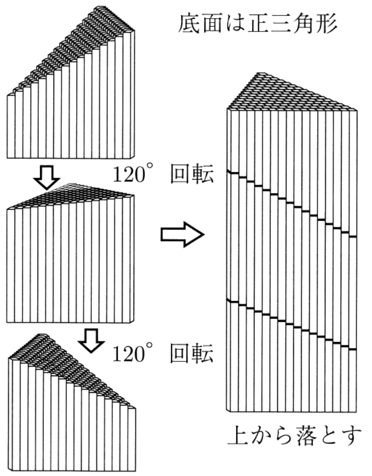
5. 壁にぶつかったら簡単な（美しい）例に戻れ

私は，**壁にぶつかったら，簡単な例に戻れ**ということも常々言っていました．この場合の簡単な例は，何と言っても「底面が正三角形」のときでしょう．この三角形だけは，本当に真ん中があるのですから．

そこで，底面が正三角形の三角柱を平面で切った立体のワリバシ空間を考えました．これはかなりピタリとはまりました．正三角形だと，何がいいかと言うと，上で説明した対応する 3 点，D_k, E_k, F_k の高さの和が等しいことを，回転操作で示すことができるのです．

このやり方は大阪教育大での小川洋子さんを囲んでのシンポジウムで披露しました．

5 年ほどは，出前授業で，このやり方ですいの体積を説明してきました．ワリバシ空間を重ねて



（「数学文化」第６号（2006）[3]に掲載）

図６

から，落としたとき，生徒たちから感嘆の声があがることもあって，かなり満足していました．ただ，このやり方では，１カ所ピンとこないところがありました．

それは，ワリバシの切り口が長方形（あるいは正方形）なので，120° 回転したら，本当はピタッと合わないのです．

リスーピア*1)でこのことを取り上げてもらうためには，模型が必要です．そこで，模型を作るときには円柱を用いて，その弱点を何とか誤魔化してきました（図７）．

でも，すこしモヤモヤした気分でいたところ，2009年から毎日小学生新聞の連載を依頼されたので，そこで取り上げてみました．相手は小学生なので，**道具はほとんど使えず，簡単な表現**でなければならないという縛りを自分にかけてみたのです．

そして，ハシを六角柱にすることで，この問題が決着をみることになりました．でも，考えてみると，円柱を使ったときに，円柱を膨らまして隙間なくすると，正六角柱が出てくるはずで，もっと早く気付くべきでした．

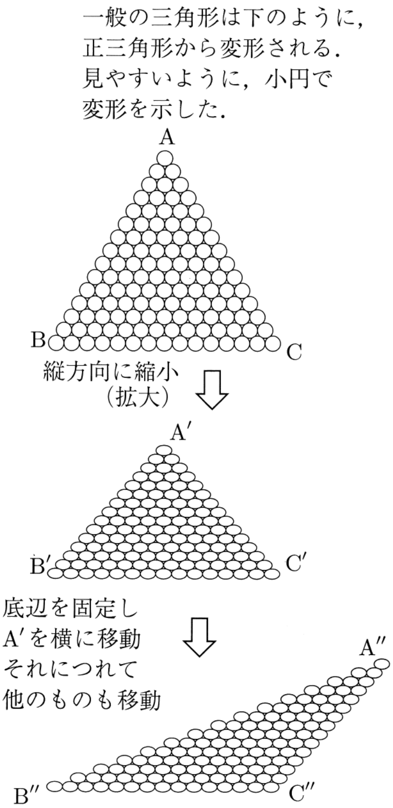


図７

6. 六角柱のワリバシでやってみる

まずは，正三角形を底面とする三角柱を切った立体から始めます．

問題　底面が正三角形の三角柱を平面で切った．このときできた立体の体積を求めよ．各頂点の高さは，図のように５cm，32cm，14cmとし，底面の面積は $40\,\mathrm{cm}^2$ とする．

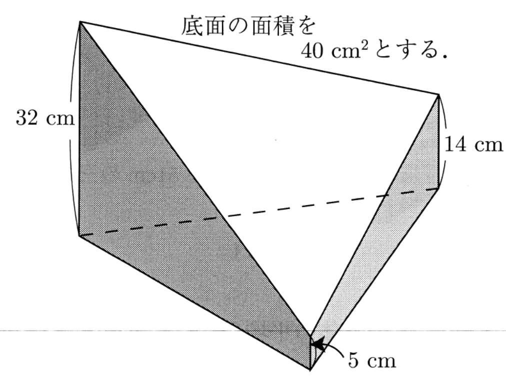


図８

*1)　東京有明のパナソニックセンターの中にある体験型の数学と理科の博物館．現在，唯一の数学に関しての常設博物館．著者は数学に関する監修を担当した．数々の賞を受賞した素数ホッケーが有名である．

まず正六角柱のワリバシ空間で近似します．

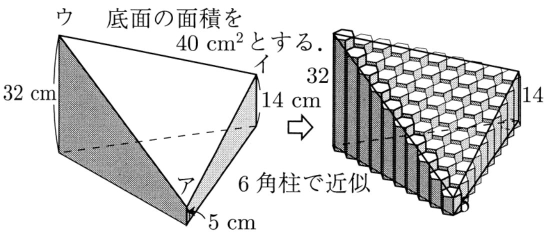


図 9

これを 2 つコピーして，120° と 240° 回転しておきます．

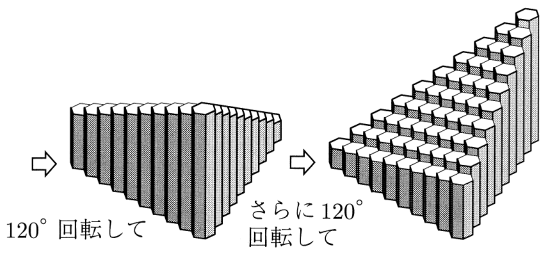


図 10

これらを，上下に重ねて，ストンと落とします．そうすると，高さ 51 cm の三角柱ができあがります．

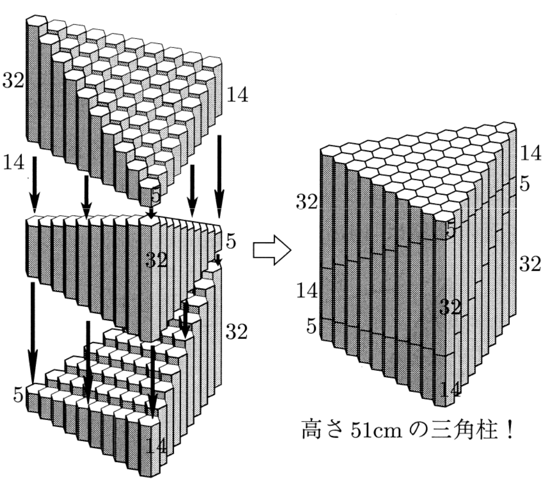


図 11

つまり，元の立体の平均の高さは $51/3 = 17$ cm となることがわかります．これは，3 つの頂点の平均の高さになっています（三角形の重心の高さでもあります）．

よって問題の立体の体積は $17 \times 40 = 680$ (cm^3) と計算されます．

六角柱で近似したので，三角柱を切った立体を変形するのも難しくはありません．変形の図だけお見せしましょう（詳しくは亜紀書房の『通勤数学』をご覧ください）．

はじめのほうで出した三角柱の図も，正三角柱に変形して計算します．要は，平均の高さですから，平均値を変えないように変形してもよいわけです．

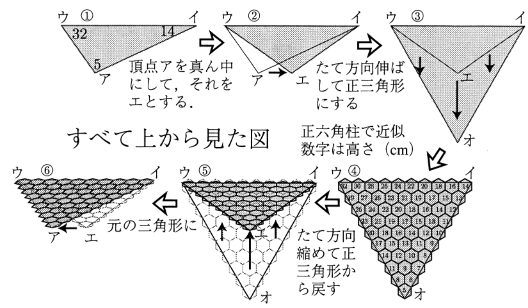


図 12

最後に，三角柱を平面で切った立体の体積が，すいの体積とどうつながるのかも，述べておきましょう．たとえば，図のような四角すいが与えられたとしましょう．

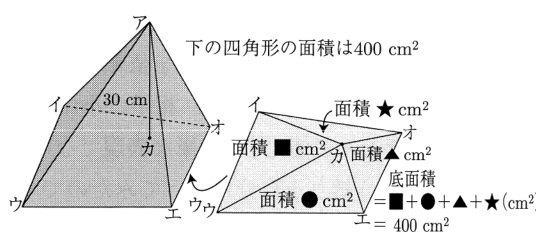


図 13

このとき，底面を垂線の足カから頂点への線分で 4 分割します．この 4 つの三角形の面積の和は 400 cm^2 です．底面の分割に従って，四角すいを切り分けていきます．たとえば，下の図の △ カエオ のところでは，△ カエオ を底面とする三角柱を平面アエオで切ったもので，この体積は，高さ 0 cm，0 cm，30 cm の平均ですから，10 cm と

なります．他のところで切り出した立体についても，すべて平均の高さが 10 cm となるのです．

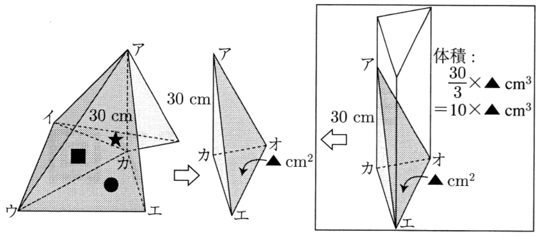


図 14

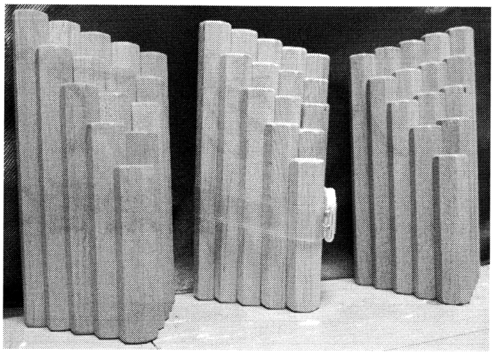
よって，全体の体積は，

$$10\times■+10\times●+10\times▲+10\times★$$
$$=10(■+●+▲+★)$$
$$=10\times400$$
$$=4000\,\mathrm{cm}^3$$

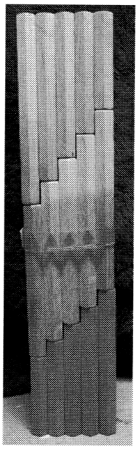
で，これは $30\times400/3$ ということで，高さ × 底面積/3 が成り立つのです．

六角柱近似を用いれば，回転体のパップスギュルダンの公式にも迫ることができます．

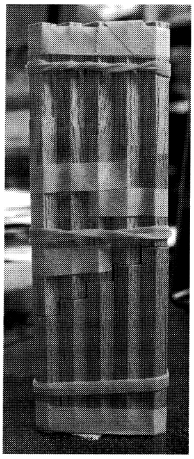
なお，六角柱については，リスーピアの協力を得て模型も作りました（図 15）．そのミニチュア版を特別価格でお分けします．数に限りがありますが，ご希望の方は okabe-t-@fa2.so-net.ne.jp にお問い合わせください．



右のだけかぶせるため面対称



重ねたとき



ミニチュア版

図 15

参考文献

1) 岡部恒治，戸瀬信之，西村和雄編『分数ができない大学生―21 世紀の日本が危ない』東洋経済新報社 (1999).
2) 岡部恒治著『数学はこんなに面白い』日本経済新聞社 (1999).
3) 岡部恒治「数学文化」第 **6** 号，15–31 (2006).
4) 岡部恒治『通勤数学 1 日 1 題』亜紀書房 (2011).

（おかべ・つねはる，埼玉大学経済学部）

シュヴィンガーと量子電磁力学

宮沢 弘成

1. はじめに

20世紀半ば素粒子論が爆発的に展開された．原動力は新しく開発された量子電磁力学（quantum electrodynamics, 略して QED）であり，その立て役者はジュリアン・シュヴィンガーである．それまでの場の理論の困難を解決し，精密実験とピタリと合う理論を建設したのであった．その人物，その業績を探ってみる．

シュヴィンガーは1918年2月12日ニューヨークに生まれた．若くして能力を顕し，高校生の1934年に，印刷発表はされなかったが，QEDについての論文を書いている．コロンビア大学で1936年に学士，1939年に博士を得たが，博士論文はその2，3年前に書かれたといわれる．これを見るとシュヴィンガーはアメリカユダヤ人家庭で典型的英才教育を受けたものと思われる．

学位取得後はカリフォルニア大学バークレー校，パーヂュー大学に勤めるが，戦争中はマサチュセッツ工科大学で戦時研究に携わった．戦後1945年ハーバード大学の準教授となり，2年後に正教授となる．これは非常に若い人事である．ここで彼のQEDが完成した．その業績に対し1965年ノーベル賞が授与される．1974年カリフォルニア大学ロサンジェルス校教授となり，1994年7月16日没．

シュヴィンガーはQED以外にもいくつかの良い仕事を残しているが，何と言ってもシュヴィンガーと言えばQEDであり，ここでは彼のその他の業績に言及する余裕も必要もないと考える．

QEDは彼が独りで創り上げたのではなく，何人かが建設に参加している．そこでまずQEDの解説から始め，それに関わった人々のこと，シュヴィンガーの人物像について考えることにする．

2. 初期の場の量子論

質点系の量子力学が完成されてすぐに場の量子力学が展開された．質点系は座標



ジュリアン・シュヴィンガー．

$$q_n(t)$$

で記述される．添字 n は系の自由度を表し，多粒子系ならば粒子の番号等も含む．場は

$$\phi(\boldsymbol{x}, t)$$

で表される．$\boldsymbol{x}, t$ は 4 次元時空間の座標で，ϕ は 4 変数の関数である．しかし $\boldsymbol{x}$ を変数でなく自由度を表す添字として扱うならば，場は無限大の自由度の粒子系と考えることができる．これで場の量子力学が作られる．波動関数は

$$\Psi[\phi(\boldsymbol{x}); t]$$

の形で，時刻 t で場が $\phi(\boldsymbol{x})$ の値をとることの確率振幅である．

この場の理論は直ちに深刻な困難に直面した．量子力学では各自由度に零点振動があり，基底状態でも場は静止していない．粒子の言葉で言えば電子は絶えず光子を放出したり，吸収したりしている．このことにより電磁現象の諸量は補正を受けるのだが，全自由度について足し上げると多くの場合無限大になってしまう．例えば電子の自己エネルギー，これは電子質量への補正になるのだが，無限個の自由度からの和が発散してしまう．電子，光子の反応への補正も同様である．

もう一つの問題は理論の相対論的不変性が不明瞭なことである．相対性理論では物理は 4 次元時空の変換（ローレンツ変換）で不変でなければならない．ところがこの場の理論では時間が変数，空間が添字と全く別に扱われており，その間の変換など考えられない．実は，最後の結果はローレンツ不変であることが証明できるのだが，一見して不変性が明らかでないのは完全な理論とは言えない．この 2 点が戦前の場の量子論の問題点であった．

3. 相対論的場の量子論

戦後シュウィンガーらにより新しい場の量子論が展開されるのだが，まず相対論的不変性のことを考えよう．

多粒子系の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots; t)$$

であるが，空間座標 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ に対し時間座標は t 一つしかないので x_n のローレンツ変換ができず，相対論的不変性がわからない．ディラックは各粒子 n に銘々の時間 t_n を割り当て，

$$\psi(\boldsymbol{x}_1; t_1, \boldsymbol{x}_2; t_2, \cdots)$$

という多時間理論を提案した．これで一見して相対論的不変な多粒子量子力学を創ることができる．

場では各空間点 $\boldsymbol{x}$ に時間 $t(\boldsymbol{x})$ を割り当てる．4 次元時空に超曲面

$$t = t(\boldsymbol{x})$$

が定義される．この曲面を σ と書く．波動関数は

$$\Psi[\phi(\sigma)]$$

と書かれる．ここには座標 $\boldsymbol{x}$ とか時刻 t などは現れず，4 次元時空の曲面 σ として出てくるので，相対論的に不変な書き表し方である．

この波動関数はどのような運動方程式に従うか．この際に相互作用表示という新しい概念を用いる．量子力学には物理量が動くハイゼンベルク表示と状態が動くシュレディンガー表示があるが，相互作用表示はその中間で，物理量（QED では電子場，電磁場）は相互作用のない自由場として動き，状態が相互作用によってのみ変化する．面 σ が時空点 x の付近で $\delta\sigma(x)$ だけ変化するとき波動関数 $\Psi[\sigma]$ の変化を与える運動方程式は

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\Psi[\phi(\sigma)] = H(x)\Psi[\phi(\sigma)] \qquad (1)$$

である．$H(x)$ は相互作用のハミルトニアンで，QED の場合，および他の多くの場合にスカラー量，すなわちローレンツ変換で不変である．

場を定義するにはその交換関係を与える．普通は同時刻で異なる 2 空間点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ での場の値の交換関係を書くのだが，相互作用表示では場は相互作用なしの自由場であるので，時間依存性は正確に解ける．任意の時刻，空間点の場の交換関係を求めることができ，それはローレンツ変換で不変

的な形である．

こうして超多時間形式，相互作用表示によって運動方程式，交換関係とも相対論的不変性が自明な形に書けた．

4. 繰り込み

場の理論における発散の処理が大問題であった．電子が光子を出し入れすることの補正により電子の質量が発散してしまう．電子・光子の反応過程でも補正が無限大である．

ところがうまいことがわかった．電子・光子過程の補正の無限大が，電子の質量補正に現れるものと全く同じなのである．補正された電子質量 m は実測される勿論有限の値である．電子過程の補正を m で書き表せば無限大は現れないで有限の結果が得られる．この操作をシュヴィンガーは電子質量の再規格化（renormalization）と名付けたが，日本ではこれを「繰り込み」という．無限大を質量 m の中に入れてしまう，という意味である．

こうして相対論的不変で，無限大のない理論ができ上がった．シュヴィンガーはこの新理論で電子の異常磁気モーメントを計算した．電子の磁気モーメントはディラックの理論から e/m で，g 因子が2である．これからのずれ $g-2$ が異常である．シュヴィンガーは $g-2$ として $\alpha/2\pi$ を得た[1]（α は微細構造定数と呼ばれるもので，約 1/137）．これは測定された値と一致した．

この仕事の前に，ラムシフトと呼ばれる水素原子の微細構造の異常が見つかっており，それが電磁補正として非相対論近似の理論で計算されていた．しかし電子の異常磁気モーメントは非相対論近似では計算できない．シュヴィンガーの仕事は新 QED の正しさを初めて証明したものであった．彼の墓石には「$\alpha/2\pi$」が刻まれている．

5. Two shakers

シュヴィンガーの QED を論じるとき当然出てくる人物は朝永振一郎である．朝永はシュヴィンガーとは独立に，彼より早く新しい場の理論に取り組み，QED の繰り込み理論まで到達したのであった．彼らの基本方程式は，記号の違いを除いて全く同じ式 (1) であり，朝永–シュヴィンガー方程式と呼ばれる．QED の建設に対し，彼らに 1965 年ノーベル物理学賞が授与された．

2 人の仕事が殆ど同じであるので，シュヴィンガーは朝永の研究を知っていたのではないか，と疑い得るがそうではない．朝永が方程式 (1) を超多時間理論と銘打って理化学研究所で発表したのは 1943 年だが，戦争中で情報がアメリカに届きようがなかった．戦後英文に翻訳，刊行され[2]アメリカに届いたのは 1948 年であった．

超多時間理論，すなわち時刻一定の面でなく，時空に超曲面を考えることはこの方面を研究するものが皆考えつくことであった．事実，湯川秀樹もこの頃超曲面の絵を描いて考えていたそうである．シュヴィンガーが朝永のことを知らずに同じ考えに到達しても不思議なことではない．

シュヴィンガーは朝永を追悼する会で，Two shakers of physics と題して講演している：「朝永振一郎と私は同じことをやったが，われわれの名前にも共通点があった．それは，振は揺することであり，schwing もドイツ語で揺することである.」

もう一つ共通点があると思う．それは 2 人とも戦時研究としてレーダーをやったことである．このために電磁気学を完全にマスターしたに違いない．電磁場の量子化は難しい問題である．相対論的にやるのはとくに難しい．それをやり遂げたのは戦時の電磁気の勉強と無関係とは言い切れない．

両人の違いを挙げるならば，シュヴィンガーは早くから秀才ともてはやされ，トントン拍子に出世し，30 才で QED を完成させたのであった．朝永も秀才ではあったが，同輩の湯川の中間子論に先を越され，悶々の日々を過ごしている．40 才を越えてやっと開花したのであった．

6. ファインマンとダイソン

もう 1 人 QED の創設者としてシュヴィンガー，朝永と一緒にノーベル物理学賞を受けたのはリチャード・ファインマンである．彼の理論は全く別のものである[3]．シュヴィンガー，朝永のは，ある

時刻（ある超曲面）での状態を考え，その時間的発展を追う，という正統的なものである．ファインマンは電子・光子反応の図を描く．電子が時空点 $(t, \boldsymbol{x})$ で光子を吸収し，$(t', \boldsymbol{x}')$ まで伝搬して，そこで光子を放出するとする．伝搬関数を置き，時空点で積分すれば電子と光子の散乱の振幅が得られる．この際 $t' < t$ でも構わない．このときは，時間の順に追うならば t' から t へ反粒子である陽電子が進むことになる．

こうしてファインマン図により電子，光子の諸過程が正しく，簡単に計算できてしまう．彼はこの方式を第一原理からではなく，殆ど直感により導いたのであった．おそらく一般大衆は呆気にとられたことであろう．

ここでフリーマン・ダイソンが登場する[4]．彼は朝永–シュヴィンガー方程式を摂動論で解いて散乱行列を求めると，その行列要素がファインマンの方法で求められることを示した．散乱行列はS-行列とも言い，これこれの運動量の粒子を送り込んだとき，どのような粒子が出てくるか，の確率振幅を行列に書き表したものである．これを計算するには運動方程式 (1) を $t \to -\infty$ での入射粒子を初期条件として解き，$t \to +\infty$ で出てくる粒子を数え上げればよい．厳密に解くのは困難であるが，電子・光子の結合は大きくないとして相互作用についてべき展開する摂動論ならば解は容易に得られる．相互作用表示では無摂動系は自由粒子の集まりで，おのおのはファインマンのいう伝搬関数で進む．こうしてその行列要素を具体的過程について計算すると，まさにファインマンの方法になるのである．

発散の処理についてはファインマンは無力であった．彼は電子は点状ではなく広がっている，ただし相対論的に不変である，としようとしたが，これはできなかった．無理に試みても，確率が保存しない，などの矛盾が生じてしまう．

繰り込みに関してはダイソンのS-行列は次のように理解される．送り込み，出てくるのを測る粒子は着物を着た質量 m をもっている．これが無摂動系の自由粒子である．電磁補正付きの電子質量は，裸の質量と自己エネルギーの和 $m = m_0 + \delta m$ であるから，元のハミルトニアンの裸の質量を

$$m_0 = m - \delta m$$

と書く．m は自由粒子の質量で，δm 項は相互作用に入れ，これが電子質量の補正を打ち消し，電子質量は変わらない．S-行列を m で書くならば無限大は現れない．

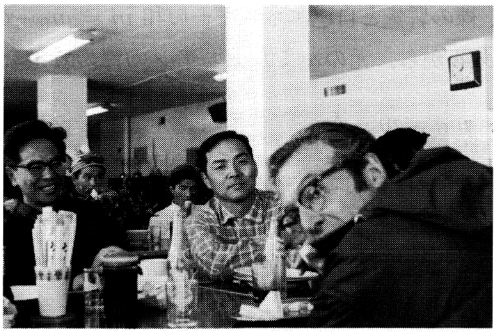
発散は質量だけでなく電荷 e_0 の真空偏極による補正にも現れるが，S-行列を着物を着た，補正付きの電荷 e で書き表すならば発散は現れない．e が実験で測られる有限の電荷である．

粒子の裸の状態から出発し，電磁補正の着物を着せていくと無限大となるのだが，着物を着た状態から始めれば有限ですむのである．S-行列は無限の過去と無限の未来の状態を繋ぐものだが，実験で測れるのはS-行列だけであり，途中の，ある時刻での状態などは測れるものではない．素粒子物理の実験に関してはSだけで充分なのである．

こうしてダイソンのまとめによってQEDは完成した．ダイソンの役割は，量子力学建設の際のディラックのに似ている．そのときはまずハイゼンベルクが行列力学を書き，続いてシュレディンガーが波動力学を提案し，両者は全く違う理論のように見えるのに同じ答えを与える．ディラックはこの2つが物理的には同じもので，数学的表現が異なるだけであることを示した．ダイソンも朝永–シュヴィンガーとファインマンの2つの理論が同じS-行列を出すものであることを示し，QEDを完成させたと言えるのだが，他の3人と一緒にノーベル賞をもらうことができなかった．ノーベル賞がまとめより独創を重んじ，1年に3人以下との内規によるのだろうが，QEDを完成させた人にとって残念なことである．

7. 人物像

筆者が大学を卒業したのはQEDが完成した頃である．創設者のシュヴィンガーはわれわれにとって神様のような存在であった．成長してもなかなか会う機会がなかった．聞くところによると彼は



越後湯沢にて.

気むずかしい，人付き合いの悪い，こわい人のようであった．

そのシュヴィンガーが1971年に1年近く筆者の勤めていた東京大学に客に来ることになった．これは大変，どのように扱ったらよいか気をもんだものである．しかし心配は杞憂であった．確かに彼は人付き合いが上手ではないが，一旦親しくなると極めて丁寧な友人であった．彼は綺麗な米語を話し，聞き取りやすい．彼はニューヨーカーだがヤンキーではなく，米国紳士であった．

シュヴィンガーはスキーが好きであった．滞在中の冬シーズンに越後湯沢と志賀高原に連れて行った．彼は達人ではない．現地でわれわれはケーブルカーで上に上がってしまったが，彼は下の初心者用ゲレンデで夫人と楽しそうに滑っていた．

6月には北大学生をお供に北海道を旅行した．最も印象に残ったのはアイヌ部落訪問であった．彼曰く，「アイヌは間違いなくコーカサス人（白人）である．アメリカでは蒙古人（黄色人）が少数民族だが，日本ではコーカサス人が少数民族である.」

人柄は物理学にも現れる．彼はよい教育者であった．彼の指導した学生のうち4人がノーベル賞を受けている．彼の講義が周到に準備され，見事に展開されることには定評がある．彼が東大で行った講義を聴講した学生が書いたものはシュヴィンガーの講義風景を彷彿させるものがある．

「教室の大きな黒板をいっぱいに使って話をするのだが，黒板のどこにどの式が書いてあるかを常に完全に掌握しつつ話を進めていく力量がすごいという感じだった．アメリカでも講義中の質問は禁止だったようだが，講義全体が交響楽のようになっていて彼がその指揮者と言ったところか．マエストロの指揮を見るような非常に見事な講義だった．内容そのものに関しては，あまり新鮮味がなくそのため学生の出席が減ってしまった.」しかし皆勤した別の聴講生は非常によい内容だったという．講義は彼がその頃研究していた源理論（source theory）が中心だったようである．

シュヴィンガーは何に付けてもファインマンと対比される．シュヴィンガーは謹厳，真面目であり，その物理は第一原理から厳密に構成，展開される．一方ファインマンは剽軽であり，殆ど直感から彼の物理を創り上げた．シュヴィンガーはファインマンのやり方を嫌ったと言われる．彼のコメントは「シリコンチップと同様にファインマン図は計算の大量生産には役立った.」

朝永は両者の中間と言うべきだろうか．物理の仕事はシュヴィンガーとほぼ同じだが，人柄がやや剽軽洒脱なところはファインマンに近い．謹厳さ，剽軽さと物理の作風とには強い相関がなさそうである．

8. 宗因我

東大に滞在中シュヴィンガーは自室に「宗因我」という名札を掲げた．これでは「ソウインガ」と読まれるので，「朱因我」とした方がよいと忠告すると彼は講釈を始めた．「宗」には「おおもと」という意味がある，つまり「源（source)」である．「宗因我」は

Source originates me.

であると言う．

前述の通りこの頃シュヴィンガーは源理論を展開していた．名前は聞いていたが，内容は全く知らなかったので，小冊子[5)]をもらい勉強してみた．非常に読みにくかった．僅かにわかったのは，まず散乱振幅の虚数部を求め，実数部を分散積分で求めるというS-行列理論でおなじみの手法に相当するものが用いられていたことであった．

このことを彼に言うと，既に承知しているようであった．「Expertsはそのように言うが，自分は

源理論から導いたものである」という意味のことを言った．彼は感情を滅多に表に現さないが，このときの彼の態度は意気軒昂というよりは意気消沈と見受けられた．

このあとシュヴィンガーはUCLAに移るのだが，源理論の評判が悪く，ハーバードを追われたのだと言われる．確かに源理論は傑作とは言えないが，S-行列理論に相当する展開も見せているのである．これを彼流の厳密さで理路整然と展開できなかったのは惜しまれる．注目したいのは，彼の場の理論的手法とは逆のS-行列的なものであること．これは全く意外のことではない．彼は戦時研究でマイクロ波の導波管の研究もしたが，入力，出力の関係を表すものが，S-行列と同じであると述べている．

一方ファインマンは晩年，論文にはならなかったが，場のことを考えたようである．素粒子物理をやるのに，中から解いていく場の理論と，外から考えるS-行列理論とを両輪として進むのがよいのであろう．

9. Do nonsense

1989年常温核融合という騒動があった．パラディウムに重水素を多量に吸着させたところ核融合が起こり，多量のエネルギーが出た，という実験が報告された．普通原子，分子の世界では核融合など起こるはずはない．しかしもし本当ならば理論上，応用上大変なことである．そこで多くの物理屋がこの問題に取り組んだが，常温核融合を正当化することはできず，結局はじめの実験は間違いであるということに落ち着いた．

シュヴィンガーはこの問題に関心をもち，これについて全部で８編の論文を書いた．これをアメリカ物理学会に送ったが，ことごとく掲載を拒否され，学会を脱会したそうである．日本の学会にも投稿されたそうである．最近になってこのことを知ったのだが，編集者に訊くと，とても掲載できるような内容ではなかったという．

これより遙かに昔のことだが，ヴィクトル・ワイスコップという人が来日して，雑談のときこんな話をした．「理論物理屋が歳をとったらやることが三つある，すなわち

Do philosophy,
Do politics,
Do nothing.」

すると同席の朝永が叫んだ，「もう一つある

Do nonsense!」

そのとき朝永は教育大学長など政治をやっていた．アイザック・ニュートンの晩年をよく調べてないが，聞くところによると彼は神学に凝ったそうである．広い意味で哲学であろう．それがやや神懸かり的であったとも聞くが，ナンセンスというべきものだろうか．

シュヴィンガーの常温核融合は全くのナンセンスだったのだろうか．それならば彼は典型的理論屋の１パターンを辿ったのである．彼の論文を読む機会がなかったのだが，彼に直接話を聞きたかった．おそらく彼は「Expertsはこう言うが，実際はこうである」と意気軒昂と解説してくれたに違いない．そのなかには，源理論のときのように，キラリと光るものがあったのではないだろうか．しかし彼は騒動後しばらくして，1994年になくなってしまった．

参考文献

1) J. Schwinger: *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).
2) S. Tomonaga: *Prog. Theor. Phys.* **1**, 27 (1946).
3) R. Feynman: *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).
4) F. Dyson: "The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman", *Phys. Rev.* **75**. 486 (1949); "The S-Matrix in Quantum Electrodynamics", *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949).
QEDを学ぶにはシュヴィンガーらの原著よりダイソンの解説のほうが読みやすい．
5) J. Schwinger: "Particles and Sources", Gordon and Breach, (1969).

（みやざわ・ひろなり，東京大学名誉教授）

リレー連載
人物で学ぶ数学
創始者の思考で学ぶ
第9回

小平邦彦

辻　元

1. 数学の研究とは何か

数学の研究とは何だろうか．私は数学の研究とは，表面的世界の裏側にある「本当の世界」を覗きこむことではないかと思う．私が5歳のとき，庭の敷石をひっくり返したら，その下に巨大なアリの巣があってびっくりしたことがある．また，多変数函数論の巨人，岡潔も子供の頃，樹幹に静止したオオムラサキが開翅するのを見て，突然現れた紫の幻光に驚き，「鋭い喜びを感じた」そうである．これと同じように，世の中には，ありふれたものながら通常気付かない種種の現象や構造がある．例えばフィボナッチ数列 $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \geq 0)$ の一般項は整数であるが一般項を式で表すと

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

のように無理数 $\sqrt{5}$ が現れる．つまり整数の世界を一皮剥いてみたら向こう側に無理数の世界が見えるのである．またオイラーの公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

は複素数という広い世界においては，指数関数と三角関数が実質的に同じものであることを示している．これも実関数の世界を一皮剥いてみると向こう側に複素関数の世界が広がっていたということに他ならない．

我々が通常見ている世界は，実は真の世界のほんの一断面に過ぎないのである．実平面上の3次曲線を眺めているようなもので，本質は楕円曲線にあり，その実平面による断面を見ているだけでは真実は見えないのである．このように数学の研究とは，何もしなければ普通は見えないけれども普遍的な世界を見つけ探究することに他ならない．問題を解くことは大事だが，それより大事なのは，その先にどれだけ広い世界が広がっているかということなのだ．例えば，ワイルズによるフェルマー予想の証明は大きなニュースだったが，問題解決自体の意義よりも有理数体上の楕円曲線の L 関数の研究に大きな進展をもたらしたことこそ意義深かったといえる．

私は学部3年生，4年生の頃，随分と小平先生の論文を読んだ．それはとても楽しいことだった．なぜなら，次々と新しい世界が開けてゆく様子が手に取るように分かるようで実に楽しかったからである．このようなダイナミックな研究を小平先生ができたのはなぜだろう．

2. 小平先生の数学

小平先生の数学者としての仕事を見て思うのは，

首尾一貫しているということである．調和積分論を手始めに，それを使って小平消滅定理，さらにはそれを用いて複素多様体の変形理論の構築を行い，それを使って複素解析曲面，代数曲面の分類を行うという具合に流れるように研究が展開してゆく．こういった研究のやり方は，普通の数学者には到底できることではない．所謂，大数学者といわれる人たちの中でも，際立っているように思う．20世紀の数学者で小平先生と比肩できるのは代数幾何学の基礎付けを行ったグロタンディークだが，研究のスタイルは全く異なる．小平先生の数学の特徴は，その「自然さ」にある．常に自然体で，研究対象に立ち向かうという感じではなく，研究対象に自然に入り込んで研究しているような印象がある．巨大な石造建築物のようなグロタンディークの数学とは質感が全く異なる．

実際に論文を読むと，アイデアは実に直截的で，自然であり，どこといって超絶技巧というような切れ味は感じられない．しかし，それにも関わらず証明されている定理は，射影代数多様体の特徴付け，といったどこから見ても重要な大定理なのである．今日の数学の研究とは小平先生の時代は，時間の流れの速さのようなものが違うのかもしれないが，とにかく，一人（一部はスペンサーとの共著であるが）でこんなに凄い理論を構築しているのに，物凄い力技というような部分がほとんど見当たらないのは，驚嘆に値する．

これはなぜだろうか．振り返ると，小平先生が活躍した1950年代から1970年代は，幾何学の大発展の時期に当たっていた．例えば，チャーンの高次元ガウス–ボンネの定理を契機に大発展した特性類の理論が整備されたり，トムのコボルディズム理論，多様体論，ファイバー束の一般論，岡–カルタンの層の理論，ホッジの調和積分論といった数々の幾何学の基礎理論がこの時期に整備された．小平邦彦は，こういった大発展の中に身をおいていたのである．研究上の苦労はもちろん在ったと思うけれど，研究の履歴を見ると新しい理論が出ると，それをまず手にとって眺め，それを使っていろいろ遊んでいる中に，次々とアイデアが湧いてきて，自然に研究が展開して行ったように見える．ここにも自然の流れに身を任せるといった小平先生の姿勢が感じられる．視野は広く持ち素直に他人の研究を受け入れ成長してゆく，そういう研究の姿勢が感じられる．

当り前といえば当り前なのだが，数学の研究はいろいろな人のアイデアを使ってできているもので，一人で何でもできるわけではない．小平先生の手記を読むと，2次元リーマン–ロッホの定理を考えたのはアンドレ・ヴェイユにそれを問題として出されたからだそうである．当時の小平先生は，アメリカのプリンストン高級研究所に滞在されていて，シカゴにヴェイユを訪ねたのであった．プリンストン高級研究所ではヒルツェブルフやワイルなどと親交があり，雑談の中からいろいろなアイデアが得られたことが良く分かる．

2.1 好き嫌いのない数学者

数学の研究は，通常は見ることのできない真の世界を探究することだから，視野は広いほうが良い．

小平先生の研究を見ると，代数，幾何，解析といった数学の分類が実はあまり意味がないことが良く分かる．小平先生は代数，幾何，解析いずれも分け隔てなく何でも吸収して使っている．偏微分方程式のことが分からなければ，ニレンバーグ（L. Nirenberg）に相談し，それを自分の研究に取り入れている．ダンフォード積分などといった関数解析的な手法も取り入れて使っている．

小平先生の論文は決して難しいことをやっているわけではないのに次々と大定理が証明されていくのは，代数，幾何，解析に跨る広い分野を好き嫌いなく使いこなしていることにもあると思う．新しい理論が出てくると，「へえーすごいなー」と感心し，それをいち早く使うだけの頭の柔軟性があった．

例えば，層の理論について勉強された小平先生は「こんなに簡単なものなのに，なぜか役に立つ，ザリスキに聞いたらザリスキも不思議がっていた」と書いていて，その頃出てきた層の理論に関心を持っていたことが良く分かる．そうこうするうちに，それからいくらも経たない中に，その層の理

論を使って代数曲面に関する2次元のリーマン–ロッホの定理を証明してしまうのである.

こういった吸収力の源泉は，何より小平先生の純真な好奇心にあったと私は思う.『怠け数学者の記』（岩波書店，2000年）を読むと，小平先生が実に子供のような純真さをお持ちであったことが良く分かる．この本にはよく「○○に感心しました」という記述が出て来る.「へえー，ほー」と素直に感心しながら，それを自分のものにしてしまう能力は素晴らしいと思う（私などは，ただ感心するだけで，なかなか自分のものにならない）．もちろん好奇心だけではこうはならないのであって，対象のどこに本質があるのかを素早く見抜く力が優れていることは言うまでもない.

代数，幾何，解析に通じていたというのも，当時の数学界の状況もあるとはいえ，先生がどんな数学にも関心を持ち，素直に受け入れる生来の資質があったと思う．実際，先生は数学科を卒業された後に，物理学科に編入学して卒業されていることを見ても，広い分野に関心をお持ちであったことは確かなようである.

3. 調和積分論

さて，小平先生の研究の根幹をなす．調和積分論について解説しよう.

コホモロジーは複体から定義される．この複体がド・ラーム複体またはドルボー複体の場合に，コホモロジーの代表元をノルム最小の元で代表することを考えるのが調和積分論である．このノルム最小の元は調和形式と呼ばれる．調和形式は線形偏微分方程式の解空間の元であるが，このように適当な変分問題の解が幾何学の世界においては極めて有用であることが多い．例えば，最近のヤン・ミルズ接続のモジュライ空間を使って定義されるドナルドソン不変量といった幾何学的不変量も同じく変分問題の解空間を使って定義されることに変わりはない.

どうしてこういった手法が有効なのかは次のように説明しよう．可微分多様体，複素多様体といった幾何学の対象は，線形空間のような単純な構造を持っているわけではない．そこでその上の微分形式やベクトル束の切断の空間といった線形空間を考えて，その性質を調べることが考えられる．こういった本質的に非線形な対象を線形空間に投影して調べることは非常に一般的なことである．種種の現象をグラフ化して視覚化することは，よく行われるが，データは線形構造を持っていることがほとんどである．例えば，売り上げから，経費を差し引いたものが利益といった具合である.

代数幾何学における標準環の研究なども，元々非線形な対象である代数多様体を線形な対象の多重標準系の直和に投影して研究しているわけである.

3.1 有限次元複体のモデル

調和積分論は無限次元の理論であるが，そのアイデア自体は有限次元の枠内で扱えるので簡単にそのアイデアを解説する.

$V_i(0 \leq i \leq n)$ を有限次元複素ベクトル空間. $d_i : V_i \to V_{i+1}$ を線形写像で，$d_{i+1} \circ d_i = 0 (i = 0, \cdots, n-1)$ となるものとする．V_i には内積 $(\ , \ )$ が入っているものとする．このとき d_i の随伴 $d_i^* : V_{i+1} \to V_i$ が

$$(d_i v, w) = (v, d_i^* w) \quad (\forall v \in V_i)$$

で定義される．d_i^* は，d_i が V_i, V_{i+1} の正規直交基底をとって $A \in M(d_i, d_{i+1})$ で行列表示されるとすれば，$d_i^* : V_{i+1} \to V_i$ は A の随伴行列 $A^* \in M(d_{i+1}, d_i)$ で表示される．そこで

$$\Delta_i = d_i^* d_i + d_{i-1} d_{i-1}^*$$

とおくと，

$$(\Delta_i v, v') = (d_i v, d_i v') + (d_{i-1}^* v, d_{i-1}^* v')$$

であるから Δ_i は自己随伴で半正定値である．即ち

$$(\Delta_i v, v') = (v, \Delta_i v') \quad (v, v' \in V_i)$$

かつ $(\Delta_i v, v) \geq 0$ である．また Δ_i の各固有空間はすべて互いに直交する．実際 $\Delta_i v = \lambda v (v \neq 0)$ なら $\lambda(v, v) = (\Delta_i v, v) = (v, \Delta_i v) = \bar{\lambda}(v, v)$ から $\lambda \in \mathbf{R}$ が分かる．また

$$\Delta_i v_1 = \lambda_1 v_1, \ \Delta_i v_2 = \lambda_2 v_2$$

とすると, $\lambda_1(v_1, v_2) = (\Delta_i v_1, v_2) = (v_1, \Delta_i v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$ なので $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら $v_1 \perp v_2$ である. これは V_i の適当な正規直交基底をとれば Δ_i は対角行列で表され, 対角成分はすべて 0 以上の実数となることを意味する. 今, $\mathbf{H}_i$ で Δ_i の 0 固有空間を表し, $P_i : V_i \to \mathbf{H}_i$ を直交射影とすると, $\Delta_i|\mathbf{H}_i^{\perp} : \mathbf{H}_i^{\perp} \to \mathbf{H}^{\perp}$ は可逆である. $G_i := (\Delta_i|\mathbf{H}_i^{\perp})^{-1} : \mathbf{H}_i^{\perp} \to \mathbf{H}_i^{\perp}$ とおくと $\varphi = P_i\varphi + G_i\Delta_i\varphi$ と直交分解が得られる. $\Delta_{i+1}d_i = d_i d_i^* d_i = d_i\Delta_i$ から $G_{i+1}d_i = d_{i+1}G_i$ が得られる. また

$$\mathbf{H}_i \simeq \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1}$$

である. つまり, $\mathbf{H}_i$ は複体

$$0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$$

の i 次コホモロジーと同型である. 実際 $\varphi \in \operatorname{Ker} d_i$ とすると

$$P_i\varphi + G_i\Delta_i\varphi = P_i\varphi + d_{i-1}d_{i-1}^* G_i\varphi$$

となる. つまり $\mathbf{H}_i$ の各元は, その元の代表するコホモロジー類の中で最小のノルムの元であることが分かる.

3.2 調和積分論

M を複素多様体とし, $A^{p,q}(M)$ を M 上の $C^\infty - (p,q)$ 形式の作る複素ベクトル空間とする. M にエルミート計量 h を固定すると. $A^{p,q}(M)$ には自然な内積が入る. 外微分 $d : A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M)$ を $d = \partial + \bar{\partial}$, $\partial : A^{p+1,q}(M) \to A^{p,q}(M)$, $\bar{\partial} : A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}(M)$ と分解する. すると $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ が成り立つので,

$$0 \to A^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,n}(M) \to 0$$

は複体となる. これを**ドルボー複体**という.

以上の構成は, E を正則ベクトル束とし, $A^{p,q}(M,E)$ を E 値 $C^\infty - (p,q)$ 形式の空間とするときも $\bar{\partial} : A^{p,q}(M,E) \to A^{p,q+1}(M,E)$ が自然に定義され $0 \to A^{p,0}(M,E) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1}(M,E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,n}(M,E) \to 0$ は複体となる. ∂ のほうは同様には定義されない. そこで h_E を E の C^∞ エルミート計量として接続 $D : A^{p,q}(M,E) \to A^{p+1,q}(M,E) \oplus A^{p,q+1}(M,E)$ を $Dh_E \equiv 0$, $D = D' + D''$, $D' : A^{p,q}(M,E) \to A^{p+1,q}(M,E)$, $D'' : A^{p,q}(M,E) \to A^{p,q+1}(M,E)$ としたとき, $D'' = \bar{\partial}$ となるように一意的に定義することができる. この接続 D をエルミート接続という. このとき $\Theta_{h_E} := D^2$ は $\operatorname{End}(E)$ 値 $(1,1)$ 形式となる. これを D の曲率形式という.

M はコンパクト複素多様体とする. M の正則接バンドル TM のエルミート計量 g で基本 2 形式

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

が閉形式, 即ち $d\omega = 0$ を満たすとき, (M,h) を**ケーラー多様体 (Kähler manifold)** という. このとき ω を (M,g) のケーラー形式と呼ぶ. この条件は, 一見何のことか不明であるが, エルミートベクトル束 (TM,h) のエルミート接続 (=チャーン接続) と (M,h) をリーマン多様体と見たときのレビ・チビタ接続が一致すること, あるいは M の任意の点 x において x の近傍での x を $\mathbf{C}^n$ の原点に写す正則局所座標 $(z^1, \cdots, z^n)$ が

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(\sum_{i=1}^{n} |z^i|^2\right)$$

となるようにとれることと同値, 即ち $\mathbf{C}^n$ の原点の近傍と漸近的に 1 次の位数まで同一視されることと同値である.

さて, $L : A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q+1}(M)$ を $L\varphi := \omega \wedge \varphi$ と定義し, $\Lambda : A^{p,q}(M) \to A^{p-1,q-1}(M)$ をその随伴作用素とする. Λ は 0 階の作用素である. さて, ケーラー多様体の特異な点は次の**ケーラー等式**と呼ばれる等式が成り立つことである.

$$[\bar{\partial}^*, L] = \sqrt{-1}\partial, \quad [\partial^*, L] = -\sqrt{-1}\bar{\partial},$$
$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*, \quad [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*.$$

但しここで $[A,B] = AB - BA$ である. この式を確かめるには, 両辺が高々 1 次の偏微分作用素しか含まないのでケーラー性から, $\mathbf{C}^n$ にユークリッド計量を入れた場合に成り立つことを計算で確かめれ

ばよい．さて，M にケーラー計量 g が入っているとすると，$A^{p,q}(M,E)$ に自然な内積 $(\ ,\ )$ を各点 x でファイバー $E_x\otimes\wedge^p T^*M_x\otimes\wedge\overline{T^*M}_x$ に g と h_E により自然な内積を入れ，これを (M,g) の体積形式に関して積分することで入れることができる．このとき，D', D'' の形式的自己随伴 $D'^{,*}, D''^{,*}$ をそれぞれ定義することができる．このとき**ケーラー等式**

$$[D''^{,*},L]=\sqrt{-1}D,\quad [D'^{,*},L]=-\sqrt{-1}D'',$$
$$[\Lambda,D'']=-\sqrt{-1}D'^{,*},\quad [\Lambda,D']=\sqrt{-1}D''^{*}$$

が全く同じ理由で成立する．このときこれから，小平–中野の公式：

$$\Delta''=\Delta'+[\sqrt{-1}\Theta(E),\Lambda]$$

が得られる．(E,h) が**中野の意味で正**であるとは $TX\otimes E$ 上の 2 次形式

$$\langle X\otimes\sigma, Y\otimes\tau\rangle := h(\sqrt{-1}\Theta_h(X,Y)(\sigma),\tau)$$

が M 上正定値であることである．今 (E,h) が中野の意味で正であれば，$[\sqrt{-1}\Theta(E),\Lambda]$ が正値作用素となり，Δ',Δ'' は半正値作用素であるから小平–中野の公式から

$$H^q(M,\Omega^p_M(E))=0 \quad (\forall p+q>\dim M)$$

が成り立つ（**小平–秋月–中野の消滅定理**）．

これを用いて，小平は次の定理を証明した．

定理[4]　(M,g) をコンパクトケーラー多様体でそのケーラー形式 ω のド・ラームコホモロジー類が $H^2(M,\mathbf{Z})\to H^2(M,\mathbf{R})$ の像に入っているとすると．M は射影代数多様体と双正則同型である．

この定理の仮定を満たす，コンパクトケーラー多様体をホッジ多様体と呼ぶ．逆に，射影代数多様体はホッジ多様体であるから，この定理は，射影代数多様体がホッジ多様体として特徴付けられることを示している．

3.3 コンパクト複素多様体の変形理論

コンパクト複素多様体は，通常幾つかのパラメータを含む形で定義されることが多い．例えば，楕円曲線は λ を上半平面 $\mathbf{H}:=\{z\in\mathbf{C}|\mathrm{Im}\,z>0\}$ の元として

$$E(\lambda):=\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\lambda\mathbf{Z}$$

と定義される．そこに注目して，小平はスペンサーと共同で，連結コンパクト複素多様体の変形理論を創始した．コンパクト複素多様体の変形とは複素多様体 X,S の間の全射固有正則写像 $f:X\to S$ で連結なファイバーを持ち，$df:TX\to TS$ が X の各点で全射となるものをいう．このとき X を全空間，S を底空間，$s\in S$ に対して $X_s:=f^{-1}(s)$ を s 上のファイバーと呼ぶ．このとき $s,s'\in S$ に対して X_s と $X_{s'}$ は互いに他の変形になっているという．

変形理論は，与えられた複素構造に十分近い複素構造を探ろうとするもので，小平–スペンサーは複素構造の微分（小平–スペンサー写像）

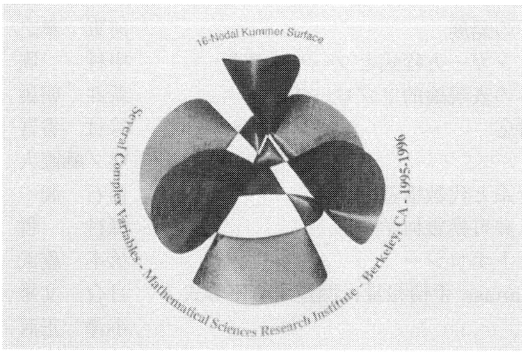
$$\rho_s: TS_s\to H^1(X_s,\mathcal{O}(TX_s))$$

を定義し，これが全射となる $s_0\in S$ で X_{s_0} に十分近い複素構造は $f:X\to S$ のファイバーにすべて含まれること（完備性定理）を証明した．これにより，複素多様体 X の変形のパラメータ空間として $H^1(X,\mathcal{O}_X(TX))$ をが考えられることになった．このことは，少し後に倉西正武により，いわゆる倉西族の構成という形で与えられた複素構造に十分近い複素構造をすべて構成するという問題に解答が与えられることになった．注目すべきなのは，倉西族の構成にも，調和積分論が用いられていることである．

3.4 複素解析曲面，代数曲面の分類

調和積分論，小平消滅定理，複素構造の変形とコンパクト複素多様体の理論の基礎固めを行った後に，小平先生は，それを用いて，複素解析曲面，代数曲面を分類するという仕事を行った．

「応用のない理論は詰まらない」という考えから始めたとのことだが，イタリア学派の先駆的な研究があったとはいえ，ほとんど一人で，分類を成し遂げてしまうのには，感心するほかにない．



MSRI 作成の T シャツにある K3 曲面（T シャツは 1995–96 年の筆者 MSRI 滞在時に購入）.

ここで特筆されるのはK3 曲面（小平，クンマー，ケーラーの 3 人のイニシャル由来を持つ複素解析曲面）がすべて変形同値であることを示したことで，さっそく自分の開発したコンパクト複素多様体の変形理論を使って得た素晴らしい成果である．また，非代数的な複素解析曲面の分類や，楕円曲面の研究の透徹した研究は素晴らしい．

小平先生の凄いのは，自分の証明した定理が，次々と役に立ちながら理論が発展していることで，全く無駄が感じられないことである．

4. 今日の複素多様体論

さて，小平先生の業績についてざっと振り返ったが，その後どのような発展があったのだろうか．

現在の複素多様体論は，主に 2 つの方向で発展している．一つは，非コンパクトな複素多様体の研究で，これは主として関数論的な興味から研究されている．この分野は，日本の岡潔の研究がその礎となっていて，例えば，解析的連接層の理論なども岡の創始したものである．もちろん小平先生も解析的連接層の理論のお世話になっている．一方，小平の調和積分論，小平消滅定理は，ヘルマンダーにより非コンパクト複素多様体に関数解析的に拡張され，現在この分野でなくてはならないものになっている[2]．一方，コンパクト複素多様体の理論に関しては，主として，射影代数多様体の理論として非常に発展している．小平により代数曲面の分類が行われたので，これを発展させる形で，3 次元以上の射影代数多様体を分類しようという動きが，飯高茂による小平次元の理論を皮切りに始まった，70 年代のことである．これが所謂，代数多様体の分類理論の始まりである．この理論は非常に興味深いものであるが，道具が十分ではなかったため，80 年代になるとやや停滞するようになった．

ところが，1979 年に森重文が，有理曲線の存在定理を証明し，豊富な接束を持つ射影代数多様体は射影空間に限ることを証明した[5]．これにより，2 次元でしか成功しなかった極小モデル理論が，高次元においても同様に存在するのではないか，という予想が立てられ（極小モデルプログラム），多数の代数幾何学者の研究により，現在，かなりの部分が解決され，急速に発展している．ここでは，川又–Viehweg の消滅定理と呼ばれる小平消滅定理の一般化が大活躍する[3]．また最近では乗数イデアル層の理論など数多くの解析的な手法が役に立っていることも注目される．最近は，代数多様体 X に対して，その標準環 $R(X,K_X)=\oplus_{m=0}^{\infty}H^0(X,mK_X)$ が有限生成であることが証明された[1]．このことにより，高次元の代数多様体の分類理論が大きく進歩することが期待されている．

参考文献

1) Birkar, C.-Cascini, P.-Hacon, C.-McKernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type, arXiv:math/0610203 (2006).
2) Hörmander, L.: “An introduction to several complex variables”, North Holland (1970).
3) Kawamata, Y.: A generalization of Kodaira-Ramanujum vanishing theorem, *Math. Ann.* **261**, (1982) 43–46.
4) Kodaira, K.: “On Kahler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)”, *Annals of Mathematics. Second Series* **60 (1)** (1954), 28–48
5) Mori, S.: Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. of Math.* **110** (1979), 593–606.

（つじ・はじめ，上智大学理工学部）

特　集（2012年4月号予告）

量子力学の数学的技法

数学の発想で量子力学へ挑む

本体952円

特　集（2012年2月号）

古典のススメ［物理編］

新しい発想のヒントを探る

本体952円

編集後記

昨年より開始されたリレー連載「数学的な感覚の探求」ですが，いかがでしょうか．

今後も数学の様々な分野における考え方が登場する予定です．その考え方そのものが数学を勉強，あるいは研究する上でのヒントに，ひいては日常生活の様々な場面に出てくる物事を考える際のヒントにもなるのではないかと思います．

数学それ自体も大変興味深いものですが，そこに用いられている考え方，発想も大変魅力があります．このリレー連載をきっかけに数学の奥深い世界に入って，さらにはもっと世の中に数学を浸透させていただければ幸いです．　(R)

*　　　*

今回の特集では，基礎的な量子力学から一歩進んだ発展的な量子の姿が見られたのではないでしょうか．また，量子の利用で様々な測定や検証への可能性を見ることができたことと思います．

大学ではこのような量子の姿まで学ばない方もいると思います．しかし，何か基礎的なことを学ぶ上で，それがどのように応用され役立てられているのかを知ることが理解を深める助けとなるのではないでしょうか．今回の特集が量子力学を学び始めた読者の皆さんにとってもこの分野に興味を持つきっかけとなれば幸いです．　(T)

数　理　科　学　3月号

2012年3月1日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁